

## Глава V. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В данной главе рассматриваются некоторые важнейшие задачи классической механики, которые или имеют общемировоззренческое значение, или могут быть спроецированы в школьный курс физики, или еще встречаются нам в других разделах курса теоретической физики.

### §1. Одномерные консервативные системы

Определение. Одномерной консервативной системой называется система с одной степенью свободы, движущаяся в потенциальном стационарном внешнем поле.

Иными словами, это система, допускающая описание в рамках лагранжева формализма, причем ее функция Лагранжа имеет следующий общий вид:

$$L = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q). \quad (1.1)$$

#### Примеры

1. Частица, движущаяся по прямой под действием силы  $F$ , зависящей только от координаты  $x$ . В этом случае

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x), \quad (1.2)$$

где

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(\eta) d\eta. \quad (1.3)$$

Таким образом, в данном примере  $q = x$  и  $a(q) = m$  – постоянная величина (масса).

2. Плоский математический маятник, для которого

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi, \quad (1.4)$$

т.е.  $q = \varphi$  и  $a(q) = ml^2$  – также постоянная величина.

3. Плоский физический маятник, т.е. твердое тело с одной неподвижной точкой, колеблющееся около положения устойчивого равновесия в поле тяжести:

$$L = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cos \varphi, \quad (1.5)$$

где  $I$  – момент инерции относительно оси вращения, а  $l$  – расстояние от оси вращения до центра масс тела. В данном случае  $q = \varphi$  и  $a(q) = I$  – вновь постоянная величина (момент инерции).

4. Для циклоидального маятника с учетом параметрических уравнений нижней арки циклоиды

$$x = R(\alpha - \sin \alpha), \quad y = -R(1 - \cos \alpha) \quad (1.6)$$

функция Лагранжа записывается как

$$L = 2mR^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2mgR \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (1.7)$$

В данном случае  $q = \alpha$  и  $a(q) = 4mR^2 \sin^2 \frac{l}{2}$  – величина, зависящая от обобщенной координаты.

Уравнение движения любой одномерной консервативной системы допускает интегрирование. В этом проще всего убедиться, используя закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 + U(q) = E = \text{Const}, \quad (1.8)$$

который дает нам дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Проводя в (1.8) разделение переменных, имеем

$$\frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{a(q)} [E - U(q)]}} = dt, \quad (1.9)$$

откуда получаем

$$\int_{q_0}^q \frac{d\eta}{\sqrt{\frac{2}{a(\eta)} [E - U(\eta)]}} = t - t_0. \quad (1.9')$$

Это соотношение можно рассматривать как закон движения частицы  $q = q(t)$ , заданный неявным образом. Начальные условия

$$q|_{t=t_0} = q_0, \quad \dot{q}|_{t=t_0} = \dot{q}_0 \quad (1.10)$$

входят в него через посредство постоянной энергии  $E$ , которая равна, очевидно,

$$E = \frac{1}{2} a(q_0) \dot{q}_0^2 + U(q_0). \quad (1.11)$$

Таким образом, задача действительно оказывается полностью разрешимой в квадратурах.

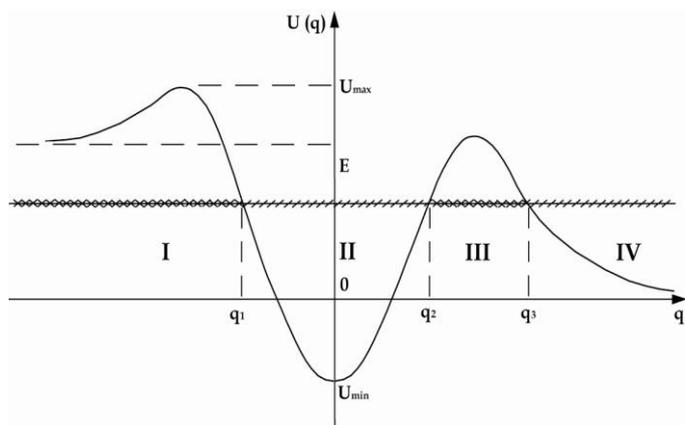
Однако много об одномерном движении можно сказать, и не решая задачу – на основе качественного анализа. Перепишем для этого закон сохранения энергии (1.8) в форме

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = E - U(q).$$

Поскольку кинетическая энергия неотрицательна, то мы заключаем, что движение системы возможно лишь в областях, где

$$E \geq U(q). \quad (1.12)$$

Пусть потенциальная энергия имеет вид, изображенный на рисунке. Тогда при заданной энергии  $E$  будем иметь следующие области:



- I. при  $-\infty < q < q_1$  движение невозможно;
- II. при  $q_1 < q < q_2$  движение происходит в ограниченной области пространства – является *финитным*;
- III. при  $q_2 < q < q_3$  движение невозможно
- IV. при  $q_3 < q < +\infty$  движение не ограничено справа – является *инфинитным*, и частица уходит на бесконечность.

Если  $E < U_{\min}$ , то движение вообще невозможно, если  $E > U_{\max}$ , то движение не ограничено ни слева, ни справа, т.е. является инфинитным.

Одномерное финитное движение всегда является периодическим, даже *колебательным*. Оно происходит около положения устойчивого равновесия, отвечающего локальному минимуму потенциальной энергии. Координата  $q$  меняется при таком движении от  $q_1$  до  $q_2$ , где «точки поворота»  $q_1$  и  $q_2$  определяются из очевидного уравнения

$$U(q) = E. \quad (1.13)$$

Период колебаний находится как удвоенное время, необходимое для прохождения отрезка  $q_2 - q_1$ , причем, согласно (1.9), он равен

$$T = \int_{q_1}^{q_2} \frac{\sqrt{2a(q)} dq}{\sqrt{E - U(q)}}. \quad (1.14)$$

Интересно, что имеет решение и *обратная* задача: если  $a(q) \equiv a = \text{Const}$ , то по зависимости периода  $T$  от «массы»  $a$  и от энергии  $E$  можно найти потенциальную энергию. Мы на этой задаче не останавливаемся.

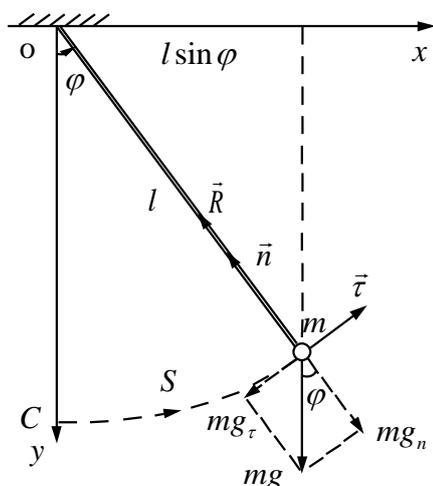
## §2. Математический маятник

Примером одномерной консервативной системы служит математический маятник – частица массы  $m$ , подвешенная на нерастяжимой нити длины  $l$  и помещенная в поле тяжести  $\vec{g}$ . Мы ограничимся анализом плоского движения маятника, причем в целях иллюстрации разнообразия методов классической механики получим его уравнение движения самыми разными способами.

1. Исходим из Второго закона Ньютона

$$m\vec{w} = \vec{F} = \vec{R} + m\vec{g}. \quad (2.1)$$

Спроектируем это уравнение на касательный орт  $\vec{\tau}$  естественной системы координат.



Учитывая, что  $w_\tau = \dot{S}$ , что  $R_\tau = 0$  и что  $g_\tau = -g \sin \varphi$  (см. рисунок), имеем:

$$m\ddot{S} = -mg \sin \varphi \quad (2.2)$$

Принимая теперь во внимание очевидное равенство  $S = l\varphi$ , перепишем (2.2) как

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$$

или, окончательно,

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0}. \quad (2.3)$$

2. Исходим из теоремы об изменении момента импульса:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{M}_R + \vec{M}_g. \quad (2.4)$$

Поскольку движение плоское, векторы  $\vec{L}$ ,  $\vec{M}_R$  и  $\vec{M}_g$  направлены вдоль прямых, перпендикулярных плоскости рисунка. Поэтому для моментов относительно точки  $O$  имеем:

$$|\vec{L}| = mvl = ml^2\dot{\varphi}, \quad |\vec{M}_R| = 0, \quad |\vec{M}_g| = -mgl \sin \varphi. \quad (2.5)$$

Подстановка в (2.4) дает

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi.$$

Откуда вновь приходим к (2.4).

3. Исходим из закона сохранения энергии (внешняя сила – консервативная, связь – идеальная и стационарная)

$$T + U = \text{Const} \equiv E, \quad (2.6)$$

или

$$\boxed{\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi = E}. \quad (2.7)$$

Дифференцируем обе части (2.7) по времени:

$$ml^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgl\dot{\varphi} \sin \varphi = 0,$$

откуда опять получаем (2.4).

4. Исходим из лагранжиана

$$L = T - U. \quad (2.8)$$

Выбирая в качестве обобщенной координаты угол  $\varphi$ , имеем:

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cos \varphi. \quad (2.9)$$

Расписывая уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.10)$$

с помощью (2.9), вновь будем иметь уравнение (2.4).

5. Исходим из гамильтониана

$$H = E \Big|_{\dot{\varphi}=f(p_\varphi, \varphi, t)}. \quad (2.11)$$

Учитывая, что, согласно (2.9),

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi},$$

выражая отсюда  $\dot{\varphi}$ :

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}$$

и подставляя это выражение в (2.7), для гамильтониана получаем

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi. \quad (2.12)$$

Канонические уравнения Гамильтона

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}; \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}. \quad (2.13)$$

С гамильтонианом (2.12) расписываются следующим образом:

$$\dot{p}_\varphi = -mgl \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}. \quad (2.14)$$

Выражая из второго уравнения  $p_\varphi$ :

$$p_\varphi = ml^2\dot{\varphi}$$

и подставляя результат в первое уравнение (2.14), получаем

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \quad (2.15)$$

и в итоге опять приходим к (2.4).

6. В формализме Гамильтона-Якоби основным является уравнение для действия  $S$  :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\varphi, \frac{\partial S}{\partial \varphi}\right) = 0, \quad (2.16)$$

которое с учетом (2.12) записывается как

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2ml^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - mgl \cos \varphi = 0. \quad (2.17)$$

Поскольку энергия сохраняется, то зависимость  $S$  от времени выделяется в явном виде:

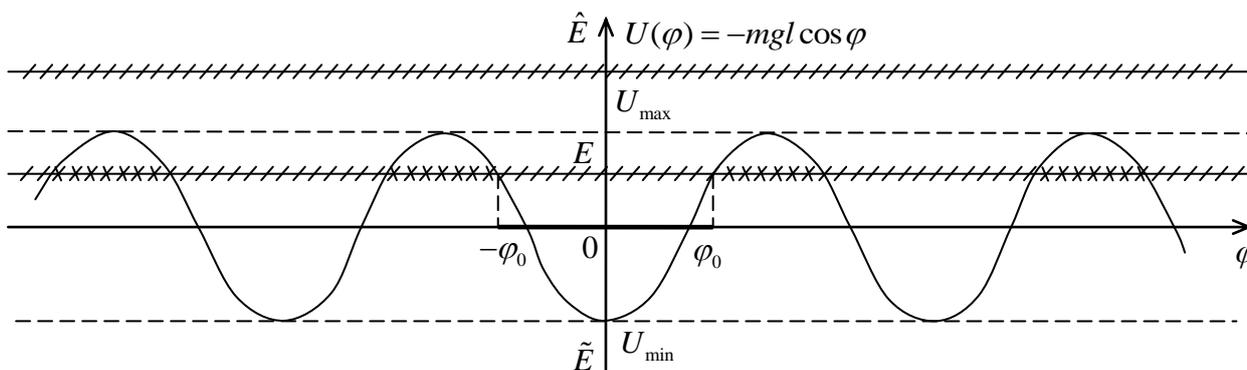
$$S = S_0 - Et, \quad (2.18)$$

причем укороченное действие  $S_0$  подчиняется уравнению

$$\frac{1}{2ml^2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2 - mgl \cos \varphi = E. \quad (2.19)$$

Отсюда можно найти  $S$ , а затем и закон движения математического маятника, но в нашем курсе этот метод подробно не рассматривается.

Итак, уравнение движения плоского математического маятника имеет общеизвестный вид (2.4). Однако в §1 мы уже выяснили, что проще исходить не из этого уравнения, а непосредственно из закона сохранения энергии (2.7). Проведем сначала качественный анализ движения, изобразив график потенциальной энергии:



а) При

$$\tilde{E} < U_{\min} = -mgl \quad (2.20)$$

движение маятника невозможно.

б) При

$$\hat{E} > U_{\max} = mgl \quad (2.21)$$

движение маятника инфинитно (по углу  $\varphi$ ). Угол отклонения беспрельдно возрастает по модулю, стремясь при  $t \rightarrow \infty$  к  $+\infty$  или  $-\infty$ . Реально это отвечает случаю, когда маятнику сообщили столь большую начальную скорость, что он способен подняться до верхнего положения и в итоге начинает вращаться.

в). Наиболее интересны энергии

$$U_{\min} < E < U_{\max}, \quad (2.22)$$

при которых маятник совершает финитное движение. Он колеблется около одного из локальных минимумов потенциальной энергии, причем для определенности будем считать, что положение устойчивого равновесия реализуется при  $\varphi = 0$  (остальные получаются путем нефизических сдвигов на углы  $2\pi k$ ).

Максимальный угол отклонения маятника, т.е. амплитуда колебаний, равен  $\varphi_0$ . В точке  $\varphi = \varphi_0$  кинетическая энергия равна нулю, так что для полной энергии можно записать

$$E = -mgl \cos \varphi_0. \quad (2.23)$$

Подставляя это выражение в закон сохранения энергии (2.7), получим:

$$\frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi = -mgl \cos \varphi_0. \quad (2.24)$$

Вычисляем период колебаний  $T$  как учетверенное время прохождения интервала углов от 0 до  $\varphi_0$ :

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \quad (2.25)$$

При анализе этого интервала удобно перейти к половинным углам по формуле

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (2.26)$$

Тогда выражение (2.25) для периода колебаний примет вид:

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad (2.27)$$

или

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left( \sin \frac{\varphi}{2} / \sin \frac{\varphi_0}{2} \right)^2}}. \quad (2.28)$$

Делаем замену переменной интегрирования, полагая

$$\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = \sin \eta. \quad (2.29)$$

Пределы интегрирования модифицируются следующим образом:

$$\varphi = 0 \rightarrow \eta = 0, \quad \varphi = \varphi_0 \rightarrow \eta = \pi/2. \quad (2.29')$$

Подынтегральная функция становится равной:

$$\left( \sqrt{1 - \left( \sin \frac{\varphi}{2} / \sin \frac{\varphi_0}{2} \right)^2} \right)^{-1} = \left( \sqrt{1 - \sin^2 \eta} \right)^{-1} = \frac{1}{\cos \eta}. \quad (2.30)$$

Дифференцирование (2.29) дает

$$\frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} d\varphi = \cos \eta d\eta,$$

откуда для дифференциала  $d\varphi$  имеем:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} \cos \eta d\eta = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}} \cos \eta d\eta \equiv \\ &\equiv \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \eta d\eta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \left( \sin \frac{\varphi}{2} / \sin \frac{\varphi_0}{2} \right)^2}} = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \eta d\eta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \eta}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$d\varphi = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \eta}} \cos \eta d\eta. \quad (2.31)$$

Собирая результаты (2.29') – (2.31) и подставляя их в интеграл (2.28), получим

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \eta}}. \quad (2.32)$$

Таким образом, для периода колебаний математического маятника с амплитудой  $\varphi_0$  окончательно получаем

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \mathbf{K} \left( \sin \frac{\varphi_0}{2} \right), \quad (2.33)$$

где

$$K(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} \quad (2.34)$$

– так называемый полный эллиптический интеграл первого рода.

Если колебания совсем малые ( $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \ll 1$  с большим запасом), то под знаком корня в (2.32) можно оставить лишь 1, и мы придем к общеизвестной формуле

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.35)$$

Гораздо более интересный случай, когда колебания малые, но не совсем, и нас интересует поправка к  $T_0$  первого порядка малости по амплитуде колебаний. Чтобы найти ее, достаточно разложить подынтегральное выражение в (2.32) в ряд Тейлора:

$$\left(1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \eta\right)^{-\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \eta. \quad (2.36)$$

Подстановка этого выражения в (2.32) дает:

$$T \cong T_0 + T_1, \quad (2.37)$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \eta d\eta = \\ &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\eta) d\eta = \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \left\{ \eta \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \sin 2\eta \Big|_0^{\pi/2} \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

т.е.

$$T_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}. \quad (2.38)$$

Подставляя в (2.37) выражения (2.35) и (2.38), получим следующую приближенную формулу для вычисления периода колебаний плоского математического маятника:

$$T \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}\right), \quad (2.39)$$

где  $\varphi_0$  – амплитуда колебаний, которая считается не очень большой.

Для оценки точности нулевого приближения (2.35) рассмотрим колебания с амплитудой  $\varphi_0 = 60^\circ$  которая вовсе не мала. В этом случае поправочный член к 1 в (2.39) равен:

$$\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{4} \sin^2 30^\circ = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Таким образом, даже при столь большом размахе колебаний поправка составляет всего около 6% от всего периода. Тем самым «школьная» формула для периода колебаний математического маятника является достаточно хорошей. Следующий поправочный член  $T_2$  пропорционален величине  $\sin^4 \frac{\varphi_0}{2}$ , и он дает гораздо меньший вклад, чем  $T_1$ .

### §3. Проблема двух тел

Обсудим теперь так называемую *проблему двух тел*. В этой задаче требуется найти движение замкнутой системы, состоящей всего из двух взаимодействующих частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Как упоминалось в конце §1, эта задача допускает точное решение, и сейчас мы покажем, что это действительно так.

В рассматриваемой системе действуют только внутренние силы, причем считается, что они подчиняются Третьему закону Ньютона. Эти силы потенциальны. Мало того, в силу однородности пространства, потенциальная энергия зависит лишь от разности координат частиц, а в силу изотропности пространства – лишь от модуля этой разности:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|). \quad (3.1)$$

Поэтому функция Лагранжа записывается в обычных координатах как

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|). \quad (3.2)$$

Из §2 предыдущей главы мы знаем, что центр масс замкнутой системы движется с постоянной скоростью. Удобно выделить это тривиальное движение, для чего достаточно перейти от  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  к координатам центра масс и к координатам относительно положения частиц:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (3.3)$$

Их можно рассматривать в качестве обобщенных координат, причем соответствующие формулы преобразования, получим, разрешая (3.3) относительно  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ :

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (3.4)$$

Подставляя эти выражения в (3.2) и проводя тривиальные выкладки, приведем функцию Лагранжа проблемы двух тел к виду:

$$L = \frac{M \dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r). \quad (3.5)$$

Здесь

$$M = m_1 + m_2 \quad (3.6)$$

есть полная масса системы, а комбинация

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.7)$$

называется ее *приведенной массой*.

Координата  $R$  является циклической, и соответствующий ей импульс

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = M\dot{R} \quad (3.8)$$

сохраняется:

$$\vec{P} = Const \Leftrightarrow \vec{V} \equiv \dot{R} = Const. \quad (3.9)$$

В итоге мы получаем независимое доказательство постоянства скорости движения центра масс.

Это тривиальное движение можно не просто выделить, а исключить совсем. Достаточно перейти в СЦМ, которая является *инерциальной* системой отсчета, поскольку  $\vec{V} = Const$ . В СЦМ, очевидно,  $\vec{R} = 0$ ,

$\dot{R} = 0$ ,  $\vec{r}$  и  $\dot{\vec{r}}$  сохраняют свои прежние значения, так как относительные координаты и скорости суть инварианты преобразований Галилея. В результате мы приходим к следующему выражению для функции Лагранжа проблемы двух тел (в СЦМ):

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r). \quad (3.10)$$

По форме (3.10) совпадает с лагранжианом одной свободной частицы с массой  $m$ , движущейся в центральном поле с потенциальной энергией  $U(r)$ . Таким образом, *проблема двух тел сводится к задаче о движении одной частицы в центральном внешнем поле*. Решив эту задачу, мы найдем зависимость  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . После этого можно получить законы движения частиц  $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$  и  $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$ . В СЦМ они записываются как

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad (3.11)$$

а в исходной системе отсчета задаются формулами (3.4). Последние, используя (3.9), можно записать следующим образом:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_0 + \vec{V}t - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R}_0 + \vec{V}t + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad (3.12)$$

где  $\vec{R}_0$  – начальное положение центра масс, а  $\vec{V}$  – скорость его движения.

Как же реально в СЦМ связаны траектории частиц  $m_1$  и  $m_2$  с траекторией «фиктивной» частицы  $m$ ? Ответ на этот вопрос дают формулы (3.11). Каждая из траекторий  $m_1$  и  $m_2$  гомотетична траектории  $m$ , с центром гомотетии в начале СЦМ. В частности, если частица  $m$  движется по эллипсу (как в задаче Кеплера – см. ниже), то и частицы  $m_1$  и  $m_2$  будут двигаться по эллипсам, гомотетичным исходным и с разными, вообще говоря, большими полуосями. Чтобы освоиться с соответствующей геометрией, рассмотрим два примера.

### Примеры

1. В атоме водорода  $m_1 = m_p$ ,  $m_2 = m_e$ , причем  $m_e \ll m_p$ , где  $m_e$  – масса электрона,  $m_p$  – масса протона. В этом случае

$$m = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \cong m_e \left(1 - \frac{m_e}{m_p}\right), \quad \vec{r}_1 \cong -\frac{m_e}{m_p} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 \cong \left(1 - \frac{m_e}{m_p}\right) \vec{r}. \quad (3.13)$$

В приближении бесконечно тяжелого протона (формально при  $m_p \rightarrow \infty$ ) имеем

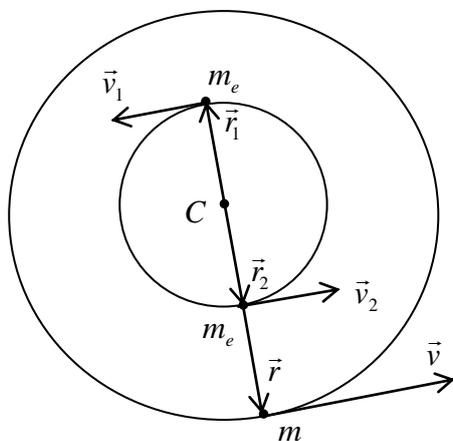
$$m = m_e, \quad \vec{r}_1 = 0, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}. \quad (3.14)$$

В итоге все движение сводится к движению электрона относительно неподвижного (в надлежащей системе отсчета, т.е. в СЦМ) протона, играющего роль силового центра. Аналогичная ситуация имеет место для систем Земля – Солнце, спутник – Земля и т.п.

2. Атом позитрония состоит из электрона и позитрона, так что в этом случае  $m_1 = m_2 = m_e$ . Здесь

$$m = \frac{1}{2} m_e, \quad \vec{r}_1 = -\frac{1}{2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{1}{2} \vec{r}, \quad (3.15)$$

т.е. параметры орбит частиц вдвое меньше параметров орбиты «фиктивной» частицы, причем в каждый момент времени электрон и позитрон располагаются по разные стороны от их центра масс. В случае, когда орбиты представляют собой окружности, движение



происходит так, как это изображено на рисунке. Правда, следует иметь в виду, что электрон и позитрон – частицы сугубо квантовые, и само понятие траектории для них весьма и весьма проблематично. Но описанная ситуация реализуется и для макроскопических объектов – в некоторых двойных звездах, например, в двойной звезде Большой Медведицы.

Итак, практически чрезвычайно важная проблема двух тел сведена к одночастичной задаче о движении во внешнем поле с потенциальной энергией  $U(r)$ . К ее анализу мы и переходим.

§4 Движение в центральном поле

Определение. *Центральным полем* называется такое потенциальное поле, для которого потенциальная энергия зависит только от модуля радиуса-вектора частицы:

$$U = U(r). \quad (4.1)$$

Установим связь этого понятия с другим аналогичным понятием, которое нам встречалось раньше, в гл. III.

Теорема. Для того, чтобы поле было центральным, необходимо и достаточно, чтобы сила, действующая на частицу, была центральной.

## Д о к а з а т е л ь с т в о

а) *Необходимость.* Пусть поле центральное. Тогда для силы имеем:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r) = -\frac{dU}{dr} \frac{\vec{r}}{r} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (4.2)$$

т.е. она является центральной в смысле §4 из гл. III.

б) *Достаточность.* Пусть сила центральная, т.е.

$$\vec{F} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (4.3)$$

Тогда, как было показано в том же §4, она потенциальна, причем

$$U = -\int_{r_0}^r F(\rho) d\rho = U(r), \quad (4.4)$$

так что поле является центральным в смысле определения (4.1).

Напомним, что в случае, когда сила постоянна по модулю или растет с ростом  $r$ , потенциальную энергию удобно восстанавливать по формуле

$$U(r) = -\int_0^{\rho} F(\rho) d\rho, \quad (4.5)$$

принимая в качестве начала отсчета сам силовой центр. Если же сила убывает с ростом  $r$ , то начало отсчета для потенциальной энергии удобнее поместить в бесконечность, так что в этом случае

$$U(r) = \int_0^{\infty} F(\rho) d\rho. \quad (4.6)$$

Теорема. При движении в центральном поле момент импульса частицы сохраняется:

$$\vec{L} = Const. \quad (4.7)$$

Этот факт очевидным образом следует из теоремы об изменении момента импульса при учете того, что сила, действующая на частицу, центральная. А вот менее тривиальное, но не менее важное утверждение

Теорема Лапласа. При движении в центральном поле всякая траектория частицы лежит в некоторой плоскости, проходящей через силовой центр.

#### Д о к а з а т е л ь с т в о

Умножая обе части определений момента импульса

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]$$

скалярно на радиус-вектор  $\vec{r}$ , имеем:

$$(\vec{r}, \vec{L}) = m(\vec{r}, [\vec{r}, \dot{\vec{r}}]) \equiv m(\dot{\vec{r}}, [\vec{r}, \vec{r}]),$$

т.е.

$$(\vec{r}, \vec{L}) = 0. \quad (4.8)$$

В более подробной записи:

$$Ax + By + Cz = 0, \quad (4.9)$$

где  $A \equiv L_x$ ,  $B \equiv L_y$ ,  $C \equiv L_z$ . Поскольку  $\vec{L}$  сохраняется, то эти величины суть константы, а потому (4.9), или (4.8), есть уравнение плоскости, проходящей через начало координат, совмещенное с силовым центром. Теорема доказана.

Полученный результат существенно упрощает задачу о движении частицы в центральном поле, уменьшая число степеней свободы с трех до двух. Совершенно ясно, что теперь в качестве обобщенных координат весьма удобно использовать *полярные координаты*  $r$  и  $\varphi$  в плоскости движения. В этих координатах функции Лагранжа

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U(r) \quad (4.10)$$

записывается как

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (4.11)$$

Дальнейшие упрощения связаны с применением законов сохранения.

Теорема. При движении в центральном поле сохраняется величина

$$L_0 \equiv mr^2\dot{\varphi} = Const. \quad (4.12)$$

Это утверждение равнозначно тому, что координата  $\varphi$  – циклическая, а потому сохраняется обобщенный импульс

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = L_0.$$

Смысл закона сохранения (4.12) прозрачен. Величина  $L_0$  есть компонента момента импульса  $\vec{L}$  в направлении, перпендикулярном плоскости движения. Но сам вектор  $\vec{L}$  тоже перпендикулярен этой плоскости, так что  $L_0$  совпадает с модулем момента импульса. Индексом нуль мы его снабдили лишь для того, чтобы не путать эту величину с лагранжианом.

Следствие. (Второй закон Кеплера)

При движении в центральном поле за равные промежутки времени радиус-вектор частицы «заметает» равные площади:

$$\frac{d\Sigma}{dt} = 0. \quad (4.13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Из (4.12) вытекает сохранение величины

$$\sigma \equiv \frac{1}{2m} L_0 = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \quad (4.14)$$

Но это есть модуль вектора

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} [\vec{r}, \vec{v}], \quad (4.15)$$

который перпендикулярен плоскости движения и который мы в свое время назвали секторной скоростью. Теперь утверждение следует из смысла секторной скорости, который был выяснен в гл. I.

Итак, мы имеем закон сохранения (4.12). Полное решение задачи проще всего получить, привлекая еще один закон сохранения.

Теорема. При движении в центральном поле механическая энергия частицы сохраняется:

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) \equiv E = Const. \quad (4.16)$$

Утверждение мгновенно вытекает из стационарности внешнего поля (или, что то же самое, из отсутствия явной зависимости функции Лагранжа от времени).

Итак, вместо того, чтобы обращаться к уравнениям движения (к уравнениям Лагранжа), имеющим второй порядок по времени, можно воспользоваться двумя законами сохранения (4.12) и (4.16), которые дают нам два дифференциальных уравнения первого порядка по времени относительно двух неизвестных функций  $r = r(t)$  и  $\varphi = \varphi(t)$ . Выпишем их еще раз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) &= E \\ mr^2\dot{\varphi} &= L_0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (4.17a) \\ (4.17б) \end{aligned}$$

Решим теперь нашу задачу, представив в явном виде закон движения частицы и уравнение ее траектории. Выразим  $\dot{\varphi}$  из (4.17б):

$$\dot{\varphi} = \frac{L_0}{mr^2} \quad (4.18)$$

и подставим результат в (4.17а):

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L_0^2}{2mr^2} + U(r) = E. \quad (4.19)$$

Отсюда мы имеем:

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{L_0^2}{m^2 r^2}}, \quad (4.20)$$

или, разделяя переменные и интегрируя,

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{L_0^2}{m^2 r^2}}} + Const. \quad (4.21)$$

Константа интегрирования находится из начального условия  $r(t_0) = r_0$ . Формула (4.21) определяет в неявном виде зависимость

$$r = r(t), \quad (4.22)$$

т.е. дает нам половину закона движения частицы.

Подставляя теперь найденную зависимость (4.22) в (4.18), найдем

$$\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_0}{m[r(t)]^2}. \quad (4.23)$$

Проводя здесь интегрирование по времени, получим

$$\varphi = \int \frac{L_0}{m[r(t)]^2} dt + Const, \quad (4.24)$$

где константа определяется из начального условия  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ . Эта формула дает нам оставшуюся половину закона движения:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (4.25)$$

Уравнение траектории в принципе можно получить, исключая время из (4.22) и (4.25). Для этого нужно выполнить два сложных интегрирования, а затем решить не менее сложную алгебраическую задачу. Однако можно поступить гораздо проще.

Поделим (4.18) на (4.20):

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} \equiv \frac{d\varphi/dt}{dr/dt} = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{L_0/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)] - \frac{L_0^2}{m^2r^2}}}. \quad (4.26)$$

Проводя теперь всего одно интегрирование, найдем:

$$\varphi = \int \frac{\frac{L_0}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{L_0^2}{r^2}}} + Const. \quad (4.27)$$

Но это и есть уравнение траектории, записанное как  $\varphi = \varphi(r)$ . При необходимости его можно обратить, представив в стандартной форме

$$r = r(\varphi). \quad (4.28)$$

Заметим, что попутно мы решили и обратную задачу – задачу об отыскании силы, действующей на частицу по известной ее траектории. Действительно, если зависимость  $\varphi = \varphi(r)$  задана, то, подставляя ее в (4.26), мы сможем найти потенциальную энергию  $U(r)$ . После этого сила восстанавливается тривиально – с помощью формулы (4.2).

Имея в виду, однако, что обычно уравнение траектории задается в форме (4.28), удобнее действовать по-другому. Поделим (4.20) на (4.18) и возведем результат в квадрат:

$$\left(\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}\right)^2 \equiv \left(\frac{dr/dt}{d\varphi/dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\frac{2}{m}[E-U(r)] - \frac{L_0^2}{m^2r^2}}{\frac{L_0^2}{m^2r^4}}. \quad (4.29)$$

Отсюда сразу находим потенциальную энергию:

$$U(r) = E - \frac{L_0^2}{2mr^2} \left[ \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + 1 \right]. \quad (4.30)$$

Следует только иметь в виду, что после вычисления производной  $dr/d\varphi$  угол  $\varphi$  должен быть выражен через  $r$ , что нетрудно сделать с помощью того же уравнения траектории (4.28).

Рассмотрим в этой связи один пример, чрезвычайно важный с исторической точки зрения. Он важен и тем, что поясняет суть и содержание Второго закона Ньютона как утверждения о том, что ускорение частицы есть функция состояния системы (вспомним гл. II).

### §5. Закон всемирного тяготения

1 января 1600 года Иоганн Кеплер, после многочисленных гонений и лишений, переезжает в Прагу и около года работает совместно с Тихо Браге. После смерти последнего в руки Кеплера попадают журналы астрономических наблюдений, которые вел Браге на протяжении четверти века и которые были весьма точны для своего времени. Обработывая результаты этих наблюдений, Кеплер открывает три своих знаменитых закона.

I закон. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (5.1)$$

где  $p$  – параметр эллипса,  $\varepsilon$  – его эксцентриситет.

II закон. Радиус-вектор планеты описывает в равные промежутки времени равные площади, т.е. ее секторная скорость постоянна:

$$\sigma = \text{Const}. \quad (5.2)$$

III закон. Квадраты времен обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{Const}. \quad (5.3)$$

В 1687 г. вышли в свет «Начала натуральной философии» Исаака Ньютона. В них, в частности, на основе анализа законов Кеплера получен *закон всемирного тяготения*:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (5.4)$$

где  $m$  – масса планеты,  $M$  – масса Солнца,  $G$  – гравитационная постоянная (более общо –  $m$  и  $M$  суть массы двух взаимодействующих точечных тел). Следует заметить, что закон  $1/r^2$  для силы тяготения первоначально, хотя и в предварительной форме, был установлен Реном, Гуком и Галлеем. Но лишь Ньютон привел его полный и окончательный вывод и осознал всю его важность и универсальность. Впоследствии он уже считал его фундаментальным законом природы, и наоборот, получал законы движения планет на основе закона всемирного тяготения.

Эта основная задача будет проанализирована в §7, а сейчас решим «обратную» задачу, т.е. получим закон всемирного тяготения, исходя из законов Кеплера.

Поскольку секторная скорость планеты постоянна, сила, действующая на нее со стороны Солнца, является центральной, и для восстановления потенциальной энергии  $U(r)$  можно воспользоваться формулой (4.30) из предыдущего параграфа:

$$U(r) = E - \frac{L_0^2}{2mr^2} \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + 1 \right]. \quad (5.5)$$

Дифференцируя уравнение траектории (5.1), имеем:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon p \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2},$$

так что

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2 p^2 \sin^2 \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^4} \equiv \frac{p^4}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^4} \frac{\varepsilon^2}{p^2} \sin^2 \varphi = r^4 \frac{\varepsilon^2}{p^2} (1 - \cos \varphi),$$

т.е.

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} r^2 (1 - \cos^2 \varphi). \quad (5.6)$$

Выражаем  $\cos \varphi$  из (5.1):

$$\cos \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{r} - 1\right), \quad (5.7)$$

в результате чего (5.6) принимает вид:

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} r^2 - 1 - \frac{1}{p^2} r^2 + \frac{2}{p} r. \quad (5.8)$$

Подставляя это выражение в (5.5), найдем:

$$U(r) = \left\{ E - \frac{L_0^2 (\varepsilon^2 - 1)}{p^2} \right\} - \frac{L_0^2}{mp} \frac{1}{r}, \quad (5.9)$$

или

$$U(r) = \text{Const} - \frac{L_0^2}{mp} \frac{1}{r}. \quad (5.10)$$

Вычисляя силу по формуле (4.2)

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \equiv F(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (5.11)$$

получим

$$F = -\frac{L_0^2}{mp} \frac{1}{r^2}. \quad (5.12)$$

Вводя удобное для дальнейшего обозначение

$$\frac{L_0^2}{mp} \equiv \alpha m, \quad (5.13)$$

перепишем (5.12) как

$$F = -\frac{\alpha m}{r^2}. \quad (5.14)$$

В выражении для  $\alpha$  перейдем от момента импульса  $L_0$  к секторной скорости  $\sigma$  с помощью равенства

$$L_0 = 2m\sigma. \quad (5.15)$$

Тогда будем иметь:

$$\alpha = \frac{L_0^2}{m^2 p} = \frac{4\sigma^2}{p}. \quad (5.16)$$

Еще раз воспользуемся вторым законом Кеплера, согласно которому  $\sigma$  есть постоянная величина, а потому может быть вычислена как

$$\sigma = \frac{\Sigma}{T} = \frac{\pi ab}{T}, \quad (5.17)$$

где  $\Sigma = \pi ab$  – площадь эллиптической орбиты. Подставляя (5.17) в (5.16), получим

$$\alpha = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{p T^2}. \quad (5.18)$$

Учитывая, наконец, связь параметра  $p$  с полуосями  $a$  и  $b$  эллипса:

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad (5.19)$$

найдем:

$$\alpha = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}. \quad (5.20)$$

Воспользуемся теперь третьим законом Кеплера, согласно которому отношение  $a^3/T^2$  одинаково для всех планет. Это означает, что  $\alpha$  есть константа, значение которой определяется лишь какими-то внутренними характеристиками Солнца:

$$\alpha = \alpha_{\odot}. \quad (5.21)$$

В итоге выражение (5.14) для силы тяготения записывается как

$$F = -\frac{\alpha_{\odot} m}{r^2}. \quad (5.22)$$

Воспользуемся теперь Третьим законом Ньютона, согласно которому

$$\vec{F} = -\vec{F}_{\odot}, \quad (5.23)$$

где  $\vec{F}_{\odot}$  – сила, действующая на Солнце со стороны планеты. Так как два тела (Солнце и планета) полностью равноправны, это позволяет записать силу (5.22) в форме

$$F = -F_{\odot} = -\frac{\alpha m_{\odot}}{r^2}. \quad (5.24)$$

Из сравнения (5.24) с (5.22) явствует, что

$$\frac{\alpha_{\odot}}{m_{\odot}} = \frac{\alpha}{m} = \text{Const} \equiv G, \quad (5.25)$$

где  $G$  – фундаментальная константа, называемая *гравитационной постоянной*. Из (5.25) вытекает важное соотношение

$$\alpha_0 = Gm_{\odot}, \quad (5.26)$$

с учетом которого сила (5.22) записывается как

$$F = -G \frac{mm_{\odot}}{r^2}. \quad (5.27)$$

После того, как Ньютон получил этот результат, он провел аналогичный анализ для системы Земля – Луна. В итоге оказалось, что сила, с которой Луна притягивается Землей, также дается формулой (5.27), с очевидной трактовкой  $m$  как массы Луны, а  $m_{\odot}$  – как массы Земли. Отсюда был сделан вывод о фундаментальном характере взаимодействия гравитирующих тел. Таким способом и был получен ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ, согласно которому

На любое точечное тело массы  $m_1$  действует со стороны любого другого точечного тела массы  $m_2$  сила притяжения

$$\vec{F}_{1-2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (5.28)$$

Закон всемирного тяготения является фундаментальным законом природы, так как имеет чрезвычайно широкую область применимости. И все же он является приближенным. Этот закон теряет свою справедливость для очень больших тел, движущихся с высокими скоростями (близкими к скорости света  $c$ ). Теория тяготения в этой общей ситуации теснейшим образом связана с теорией пространства и времени. Она была построена А. Эйнштейном в 1916 г. и именуется общей теорией относительности (ОТО). Основное уравнение этой теории чрезвычайно изящно:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\alpha T_{\mu\nu}. \quad (5.29)$$

Но на данном этапе мы не можем даже пояснить смысл входящих в него величин. Заметим лишь, что  $R_{\mu\nu}$  (и  $R$ ) описывает одновременно и свойства пространства-времени (кривизну 4-мерного пространства) и свойства гравитационного поля (которое и есть эта кривизна). Величина же  $T_{\mu\nu}$  задает распределение и движение материи, а  $\alpha$  – константа, выражающаяся через  $G$ . Закон всемирного тяготения получается из (5.29) в пределе достаточно слабых полей (малые массы) и сравнительно малых скоростей ( $v \ll c$ ).

Но нет ли в законе всемирного тяготения чего-то точного, остающегося справедливым и в ОТО? Оказывается, есть, и весьма существенное. Чтобы разобраться в этой проблематике, следует более подробно обсудить содержание закона всемирного тяготения. На самом деле, он содержит два совершенно разных утверждения.

- а) Сила тяготения является центральной, и ее величина обратно пропорциональна квадрату расстояния между гравитирующими телами .
- б) Сила тяготения пропорциональна произведению масс гравитирующих тел.

Первое положение является в какой-то степени «тривиальным» – недаром оно было установлено за несколько лет до Ньютона. Именно оно является приближенным, и именно закон  $1/r^2$  модифицируется в ОТО.

Второе положение было открыто самим Ньютоном. Оно гораздо менее тривиально и оказывается абсолютно точным (см. ниже), а потому заслуживает специального обсуждения.

Собственно, вывод закона Всемирного тяготения, в его первой части, можно было завершить получением формулы (5.12), как раз и задающей закон  $1/r^2$ . Дальше можно было бы рассуждать следующим образом. Константа, входящая в эту формулу, должна определяться какими-то внутренними характеристиками взаимодействующих тел (скажем, Земля и Солнце), причем эти характеристики должны в нее симметричным образом. Поэтому естественно ввести обозначение

$$\frac{L_0^2}{m\mu} \equiv \mu_1\mu_2, \quad (5.30)$$

переписывая (5.12) в форме

$$\vec{F} = -\frac{\mu_1\mu_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.31)$$

и называя величину  $\mu$  *гравитационным зарядом* данной частицы. Основание для этого следующее. Ведь при выборе этой формулы используется только первый закон Кеплера, т.е. то, что частица движется по эллипсу. Но такое движение не является уникальным – заряженная частица в поле неподвижного заряда также движется по эллипсу. И, в принципе, если бы существовали макроскопические системы типа атома водорода, закон Кулона мог бы быть открыт точно так же, как закон всемирного тяготения. Но он записывается ( в системе СГСЕ) как

$$\vec{F}_{\text{кул}} = \frac{q_1q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (5.32)$$

где  $q$  – обычный электрический заряд частицы.

На этом этапе можно теперь подключить второй и третий законы Кеплера и получить выражение для константы в (5.12) так, как мы это делали выше. В итоге приходим к формуле (5.28), сравнивая которую с (5.31), получим

$$\mu_1\mu_2 = Gm_1m_2. \quad (5.33)$$

Отсюда следует результат фундаментальной важности:

$$\mu = \sqrt{G} m. \quad (5.34)$$

Он гласит, что

|| Гравитационный заряд любого тела пропорционален массе этого тела.

О нетривиальности его свидетельствует хотя бы тот факт, что электрический заряд  $q$  в общем-то совершенно не связан с массой  $m$ .

В такой ситуации естественно измерять гравитационный заряд в таких единицах, чтобы его размерность и численное значение совпадали с размерностью и численным значением массы. Для этого достаточно просто предопределить его, вводя величину

$$m_g \equiv \frac{1}{\sqrt{G}} \mu \quad (5.35)$$

и записывая формулу (5.31) в виде

$$\vec{F} = -G \frac{m_1^{(g)} \cdot m_2^{(g)}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (5.36)$$

Здесь общепринята следующая терминология.

Определение. Величина  $m_g$  называется *гравитационной массой* частицы, а  $m$  – ее *инертной массой*.

Еще раз подчеркнем, что это совершенно различные характеристики частицы. Первая из них служит «мерой инертности», определяя силу, с которой действует на частицу гравитационное поле. Чем больше гравитационная масса, тем с *большим* ускорением должна двигаться частица. Инертная масса есть мера «пассивности» тела – чем больше она, тем с *меньшим* ускорением должна двигаться частица.

На этом языке фундаментальное соотношение (5.34) формулируется следующим образом.

Принцип универсальности. Гравитационная и инертная массы тела всегда совпадают:  $m_g = m$ .

Данное утверждение означает, что ускорение данного тела в поле тяготения вообще не зависит от его массы: инертная масса при ускорении во Втором законе Ньютона сокращается с гравитационной массой, входящей в выражение для гравитационной силы. Формально это находит свое выражение в том, что в нерелятивистской механике телу в гравитационном поле отвечает функция Лагранжа

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - m\varphi, \quad (5.37)$$

которая приводит к уравнениям движения

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\varphi, \quad (5.38)$$

вообще не содержит массу. Функция  $\varphi$  имеет тот же смысл, что и электростатический потенциал, и называется *гравитационным потенциалом*.

Принцип универсальности имеет фундаментальный характер, а потому подвергался и подвергается поныне жесткой экспериментальной проверке. Впервые он был установлен фактически Галилеем, который обнаружил, что ускорение тела, движущегося под действием силы тяжести Земли, не зависит от материала, из которого изготовлено данное тело. В этой

связи уместно вспомнить опыт Галилея с падением пушинки и свинцового шарика в трубке, из которой откачен воздух.

Уже сам Галилей сознавал необходимость более тщательной проверки этого факта. С этой целью он измерил периоды колебаний маятников одинаковой длины, но изготовленных из разных материалов, и не обнаружил зависимость периода от материала. Следующий шаг фактически принадлежит Кеплеру, установившему свой третий закон, на основе которого мы, собственно, и вывели заключение о равенстве гравитационной и инертной масс. Сам Кеплер, конечно, не вкладывал в свой закон такого содержания – это было сделано Ньютоном. Ньютон же усовершенствовал методику Галилея и также не нашел зависимость периода колебаний маятника от его массы. С помощью все тех же маятников Бессель (первая половина 19 в.) установил, что отношение  $m_g/m$  отличается от 1 не более, чем на  $1/60\ 000$ . Этвеш, начавший свои исследования в 1887 г., Зеeman в 1917 – 1922 г.г. при помощи крутильных весов и так называемых гравитационных вариометров улучшили результат до  $5 \cdot 10^{-9}$ . В опытах Дикке и др. (1964 г.) с золотом и алюминием точность измерений доведена до  $3 \cdot 10^{-11}$ . Это то же самое, как если бы они взвесили корабль водоизмещением в 10 000 тонн вместе с грузом с точностью до 0,01 грамма. Наконец, ряд исследователей подтвердили равенство инертных и гравитационных масс для элементарных частиц и их античастиц.

Равенство инертной и гравитационной масс рассматривалось в классической физике как своего рода курьез, как случайное и совершенно необъяснимое совпадение. Лишь А.Эйнштейн осознал всю его глубину и сформулировал на основе принципа универсальности другой фундаментальный принцип, послуживший фундаментом его ОТО.

Для выяснения сути дела вспомним, что в неинерциальной системе отсчета при формулировке Второго закона Ньютона приходится вводить наряду с реальными силами, обусловленными взаимодействиями тел, еще и фиктивные силы инерции, имеющие чисто кинематическое происхождение. В итоге Второй закон записывается как

$$m\vec{w}_0 = \vec{F} + \vec{F}_{ин}, \quad (5.39)$$

где  $\vec{w}_0$  – относительное ускорение, т.е. ускорение, измеренное в неинерциальной системе. Самое главное для последующего – это то, что силы инерции являются *массовыми силами*, т.е. они пропорциональны (инертной) массе тела  $m$ . Это видно из примера 2, рассмотренного в §7, причем к этой проблеме мы еще вернемся.

Казалось бы, что по наличию сил инерции можно судить об ускоренном характере системы отсчета, т.е. о ее неинерциальности. Для этого достаточно взять изолированную частицу и убедиться, что она в данной системе отсчета обладает ускорением. Однако А.Эйнштейн, вдохновляясь идеей о возможности распространения принципа относительности на любые системы отсчета (а не только на ИСО), обратил внимание, что такой вывод является слишком поспешным. Основываясь он как раз на принципе универсальности, согласно которому в данном контексте можно считать силы инерции пропорциональными гравитационной массе тела. Но тогда силы инерции становятся полностью подобными гравитационным силам. И мы в принципе не можем установить, обусловлено ли ускорение изолированной частицы неинерциальностью системы отсчета или появлением каких-то гравитационных полей. В итоге А.Эйнштейн сформулировал следующее фундаментальное положение.

Принцип эквивалентности. Произвольное движение системы отсчета эквивалентно наличию некоторого гравитационного поля.

Правда, в глобальных масштабах принцип эквивалентности не работает. Ведь силы инерции растут на бесконечности (например, центробежная сила инерции) или, в лучшем случае, остаются постоянными. Истинные же гравитационные поля, создаваемые финитным распределением веществ, всегда убывают на бесконечности. Но это и не столь важно, поскольку А.Эйнштейну была достаточной справедливостью принципа эквивалентности лишь локально – в достаточно малых областях пространства и в течение небольших промежутков времени.

Итак, силы инерции, имеющие в классической физике чисто геометрическое (кинематическое) происхождение, эквивалентны (локально) гравитационным силам, имеющим в классической физике чисто динамическую природу. Наоборот, динамические гравитационные силы эквивалентны геометрическим силам инерции. Гениальная догадка А.Эйнштейна в том и состоит. Что в данном случае эквивалентность означает тождественность, и что (по крайней мере, для гравитационных явлений) геометрия и динамика – одно и то же. Это есть самая главная и самая кардинальная идея ОТО, и в свете сказанного не должно казаться столь уж диким утверждение о том, что гравитация есть ни что иное, как некое свойство пространства-времени (на самом деле – кривизна 4-мерного пространственно-временного континуума). Этим замечанием мы и завершим анализ закона всемирного тяготения.

§6. Движение в центральном поле  
(качественный анализ)

Вернемся к основной нашей задаче – к определению движения частицы массы  $m$  в заданном центральном поле  $U(r)$ . Как было показано в §4, эта задача допускает полное решение в квадратурах: формулы (4.21) и (4.24) задают закон движения частицы, а (4.27) – уравнение ее траектории.

Однако, как и в одномерном случае, о движении частицы в центральном поле многое можно сказать и не решая задачу до конца – на основе *качественного анализа*. Исходным здесь является соотношение (4.19), вытекающее из законов сохранения:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2} = E. \quad (6.1)$$

Его можно представить в форме закона сохранения энергии для *одномерного движения* частицы:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{эф}}(r) = E, \quad (6.2)$$

где

$$U_{\text{эф}}(r) \equiv U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2} \quad (6.3)$$

– так называемая *эффективная потенциальная энергия*. Первое слагаемое в ней есть *обычная потенциальная энергия*, а второе слагаемое не совсем удачно называют *центробежной энергией* (на жаргоне – центробежным барьером). Весь анализ, проведенный в §1, сохраняет свою силу и здесь. Главное, что движение возможно лишь в тех областях пространства, где выполняется неравенство

$$U_{\text{эф}}(r) \leq E. \quad (6.4)$$

Но, во избежание недоразумений, следует подчеркнуть, что по сравнению с обычным одномерным случаем, качественный анализ движения частицы в центральном поле обретает ряд новых особенностей.

1. Он дает нам информацию только о *радиальной составляющей* движения, т.е. о том, в каких пределах может изменяться расстояние частицы от силового центра. Азимутальная же составляющая движения, которая обычно также присутствует, в принципе может быть произвольной.
2. В противоположность обычному одномерному случаю, где частица может двигаться по всей прямой  $\mathbb{R}$  теперь ее «движение» (радиальная составляющая) возможно лишь *на полупрямой*  $(0, +\infty)$ .
3. Если начало координат входит в область разрешенного движения, т.е. значение  $r = 0$  удовлетворяет основному неравенству (6.4), то возникает явление, качественно новое по сравнению с одномерным случаем, – *падение частицы на силовой центр*.
4. По-прежнему границы области движения по расстоянию от силового центра определяют значения  $r = r_0$ , при которых

$$U_{\text{эф}}(r) \equiv U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2} = E. \quad (6.5)$$

В этих точках, называемых *точками поворота*, радиальная составляющая  $\dot{r}$  скорости  $\vec{v}$  обращается в нуль. Однако, это *не означает остановки частицы*, как то было в одномерном случае. У вектора скорости  $\vec{v}$  имеется еще и азимутальная составляющая  $r\dot{\phi}$ , вовсе не обязанная равняться нулю при  $\dot{r}=0$ . Хорошей иллюстрацией может служить движение частицы по окружности вокруг силового центра, когда  $r = \text{Const}$ ,  $\dot{r}=0$ , но  $\dot{\phi} \neq 0$ , а стало быть, и  $r\dot{\phi} \neq 0$ .

5. Если имеется лишь одна точка поворота  $r = r_0$ , причем  $U_{\text{эфф}} < E$  при  $r > r_0$ , то движение частицы – *инфинитное*. Ее траектория лежит в области  $(r_0; +\infty)$ . Однако, если в одномерном случае частица приходит из бесконечности по прямой и уходит на бесконечность по той же прямой, теперь частица может приходить из бесконечности и уходить туда вновь *по разным направлениям*. Примером тому служит движение кометы вокруг Солнца по гиперболической траектории.
6. Если имеются две точки поворота  $r = r_1$  и  $r = r_2$  (пусть для определенности  $r_1 < r_2$ ), причем  $U_{\text{эфф}} < E$  при  $r_1 < r < r_2$ , то движение частицы – *финитное*. Оно происходит в области  $(r_1, r_2)$ . Это, однако, вовсе не означает, что траектория частицы непременно является *замкнутой кривой*, хотя и может быть таковой в отдельных случаях (пример – движение планеты вокруг Солнца по эллиптической орбите).

Эта проблема заслуживает чуть более подробного обсуждения. За время, в течение которого  $r$  изменяется от  $r_1$  до  $r_2$ , а затем вновь до  $r_1$ , радиус-вектор повернется на угол  $\Delta\varphi$ , который равен, согласно (4.27),

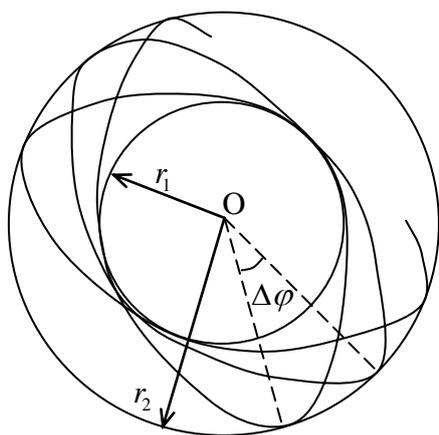
$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{\frac{L_0}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{L_0^2}{r^2}}} . \quad (6.6)$$

Траектория будет замкнутой лишь в том случае, когда этот угол равен рациональной части от  $2\pi$ :

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{m}{n} . \quad (6.7)$$

Тогда через  $n$  повторений указанного промежутка времени ( движение от одного *перигелия* до соседнего) радиус-вектор частицы, сделав  $m$  полных оборотов, совпадает со своим начальным положением, и траектория замкнется.

Однако условие (6.7) выполняется лишь в исключительных случаях – или для специальных полей  $U(r)$  (см. ниже), или при строго определенных начальных



условиях (например, когда начальная скорость перпендикулярна начальному радиусу-вектору, частица движется по окружности). В общей ситуации траектория лежит в кольце с радиусами  $r_1$  (окружность перигелиев) и  $r_2$  (окружность апогелиев), бесчисленное множество раз проходит через перигелии и апогелии, касаясь границ кольца, и всюду плотно покрывает его внутреннюю область.

В этой связи следует упомянуть следующий важный результат, полученный в 1873 г.

Теорема Бертрана. Траектория финитных движений при произвольных начальных условиях замкнута лишь в центральных полях вида:

$$\text{а) } U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0; \quad (6.8a)$$

$$\text{б) } U(r) = \frac{kr^2}{2}, \quad k > 0. \quad (6.8б)$$

Случай (6.8a) соответствует задаче Кеплера, которая будет рассмотрена в следующем параграфе. Здесь все финитные траектории – эллипсы с *фокусами* в силовом центре. Случай (6.8б) отвечает *пространственному осциллятору*, движение которого было проанализировано в гл. III, §1. Там было установлено, что при любых начальных условиях траектории частицы суть эллипсы с центрами в силовом центре.

Оказывается, что замкнутость траекторий в двух ( и только двух) указанных случаях – далеко не случайное явление. Оно тесно связано с тем, что при движении частицы в полях вида (6.8) появляются, наряду с законами сохранения энергии и момента импульса, еще и некоторые *новые законы сохранения*. Об одном из них будет сказано в связи с задачей Кеплера. Но, как и всегда, законы сохранения связаны с наличием у системы каких-то свойств симметрии. Такие симметрии, которые порождают «неканонические» законы сохранения, называются скрытыми или *динамическими симметриями*. Первый термин подчеркивает, что они сразу не видны, а второй термин подчеркивает их отличие от обычных геометрических симметрий – в нашем случае от однородности времени (сохранение энергии) и изотропности пространства (сохранение момента импульса). Наличие динамической симметрии и порождаемого ею закона сохранения приводит в квантовой механике к очень интересному явлению – к так называемому *дополнительному вырождению* энергетических уровней. К этой проблеме мы еще вернемся в соответствующем курсе.

От чего же зависит характер движения частицы в центральном поле в заданной области пространства, т.е. в заданном интервале значений  $r$ ? Ответ очевиден: от вида потенциальной энергии  $U(r)$ ; от значения полной энергии  $E$ , определяемого начальными условиями; от значения момента импульса  $L_0$ , определяемого также начальными условиями.

Чтобы увидеть богатство возникающих здесь возможностей, чрезвычайно полезно рассмотреть движение частицы в центральном поле с потенциальной энергией степенного вида:

$$U(r) = \alpha r^n, \quad (6.9)$$

где  $n$  – целое число (положительное, отрицательное или нуль), а  $\alpha$  – некоторая константа (положительная либо отрицательная). Предлагается провести качественный анализ самостоятельно, рассмотрев отдельно случаи  $\alpha > 0$  и  $\alpha < 0$  при  $n > 0$ ,  $n = 0$ ,  $-2 < n < 0$ ,  $n = -2$ ,  $n < -2$ , а также при  $L_0 \neq 0$  и  $L_0 = 0$ . Мы же ограничимся приведением полного анализа наиболее интересного случая  $n = -1$ .

### §7. Задача Кеплера

Задача Кеплера – это задача о движении частицы под действием центральной силы

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (7.1)$$

Иными словами, это задача о движении частицы в центральном поле с потенциальной энергией

$$U = \frac{\alpha}{r}. \quad (7.2)$$

Таким образом, термин «задача Кеплера» трактуется весьма широко. В зависимости от смысла константы  $\alpha$ , мы получаем разные физические задачи:

а) Если

$$\alpha = -GmM, \quad (7.3)$$

то рассматривается движение частицы массы  $m$  в гравитационном поле, создаваемом неподвижной частицей массы  $M$ . Примеры – движение небесного тела в поле Солнца, движение космического корабля в поле Земли.

б) При

$$\alpha = -eq \quad (7.4)$$

имеем задачу о движении заряженной частицы (модуль заряда  $e$ ) в поле притяжения разноименно заряженной неподвижной частицы (модуль заряда  $q$ ). Пример – движение электрона в водородоподобном атоме.

в) Когда

$$\alpha = eq, \quad (7.5)$$

приходим к задаче о движении заряженной частицы (заряд  $e$ ) в поле отталкивания одноименно заряженной частицы (заряд  $q$ ). Пример – рассеяние альфа-частицы атомным ядром.

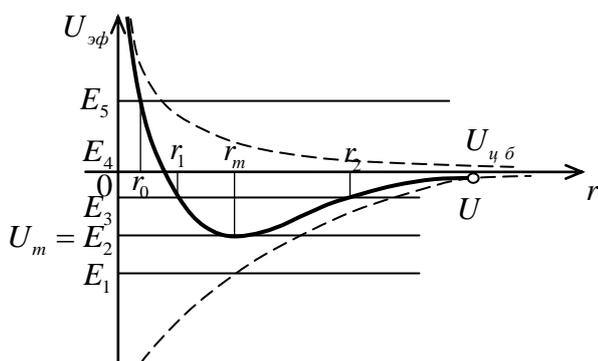
Исследуем сначала случаи (а) – (б), отвечающие притяжению, и будем записывать потенциальную энергию (7.2) как

$$U = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0. \quad (7.6)$$

Проведем качественный анализ, имея в виду, что эффективная потенциальная энергия в данном случае равна

$$U_{\text{эф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L_0^2}{2mr^2}. \quad (7.7)$$

График этой функции при  $L_0 \neq 0$  изображен на рисунке. При  $r \rightarrow 0$  она обращается в  $+\infty$ ,



при некотором значении  $r = r_m$  обладает минимумом, а при  $r \rightarrow +\infty$  стремится к нулю со стороны отрицательных значений.

Рассмотрим зависимость характера движения частицы от ее энергии  $E$ , определяемой начальными условиями.

1. При  $E < U_m$  движение невозможно.
2. При  $E = U_m$  частица движется по окружности радиуса  $R = r_m$ .
3. При  $U_m \leq E < 0$  движение финитное (как мы увидим ниже, траекторией частицы в этом случае является эллипс).
4. При  $E = 0$  движение становится инфинитным (частица движется по параболе – см. ниже).
5. При  $E > 0$  движение является инфинитным (ниже будет установлено, что траектория частицы – гипербола).

Ни при каком значении энергии частица не может приближаться к началу координат, т.е. падения на силовой центр не происходит. Напомним, в этой связи, что пока рассматривается случай  $L_0 \neq 0$ .

На основе качественного анализа можно сделать и кое-какие количественные выводы. Определим значение  $r = r_m$ , при котором потенциальная энергия обладает минимумом. Оно находится из условия

$$\left. \frac{dU_{эф}}{dr} \right|_{r=r_m} = \frac{\alpha}{r_m^2} - \frac{L_0^2}{mr_m^3} = 0, \quad (7.8)$$

которое дает для  $r_m$ , а стало быть, и для радиуса  $R$  круговой орбиты

$$r_m \equiv R = \frac{L_0^2}{\alpha m}. \quad (7.9)$$

Учитывая, что при круговом движении

$$L_0 = mv_l R, \quad (7.10)$$

перепишем равенство (7.9) в виде

$$1 = \frac{mv_l^2 R}{\alpha}. \quad (7.11)$$

Отсюда можно найти радиус круговой орбиты при заданной скорости  $v_l$ :

$$R = \frac{\alpha}{mv_l^2}. \quad (7.12)$$

Но можно выразить и скорость  $v_I$  через известный радиус  $R$  :

$$v_I^2 = \frac{\alpha}{mR}. \quad (7.13)$$

В частности, в собственно задаче Кеплера, когда  $\alpha$  задается формулой (7.3) с уже учтенным знаком минус,

$$v_I^2 = \frac{GM}{R}. \quad (7.14)$$

Пусть теперь  $M$  – масса Земли, а  $R$  – ее радиус. Перепишем (7.14) как

$$v_I^2 = \frac{GM}{R^2} R. \quad (7.15)$$

Учитывая, что величина

$$\frac{GM}{R^2} \equiv g \quad (7.16)$$

есть ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли, найдем

$$v_I^2 = gR. \quad (7.17)$$

Но что такое  $v_I$ ? Эта та скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно двигалось по окружности в непосредственной окрестности земного шара. Такая скорость называется *Первой космической скоростью*, откуда и индекс  $I$  у  $v$ . В итоге для первой космической скорости мы получаем

$$v_I = \sqrt{gR} \cong 8 \text{ км/с}. \quad (7.18)$$

Рассмотрим теперь случай 3, т.е. произвольное финитное движение. Расстояние частицы от силового центра меняется в этом случае в пределах от  $r_1$  до  $r_2$ , которые находятся из условия

$$U_{\text{эф}} \equiv -\frac{\alpha}{r} + \frac{L_0^2}{2mr^2} = E \equiv -|E| \quad (7.19)$$

или

$$r^2 - \frac{\alpha}{|E|} r + \frac{L_0^2}{2m|E|} = 0. \quad (7.20)$$

Это квадратное уравнение имеет два корня

$$r_{1,2} = \frac{\alpha}{2|E|} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2} - \frac{L_0^2}{2m|E|}}. \quad (7.21)$$

Первый корень определяет положение апоцентра ( $r_1 = r_{\text{max}}$ ), второй корень – положение перигея ( $r_2 = r_{\text{min}}$ ). Их полусумма равна:

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{\alpha}{2|E|}. \quad (7.22)$$

Но что такое эта полусумма? Если считать известным, что частица движется по эллипсу, то очевидно, она будет давать нам значение его большой полуоси  $a$ . Таким образом, мы получаем из (7.22):

$$a = \frac{\alpha}{2|E|}. \quad (7.23)$$

Рассмотрим теперь случай 4, когда  $E = 0$ , и движение становится инфинитным. Пусть в какой-то момент времени (начальный) частица находится на расстоянии  $R$  от силового центра. Найдем значение ее скорости  $v_{II}$ , при котором реализуется интересующий нас случай. Условие  $E = 0$  записывается как

$$E \equiv T + U \equiv \frac{mv_{II}^2}{2} - \frac{\alpha}{R} = 0, \quad (7.24)$$

откуда получаем

$$v_{II}^2 = 2 \frac{\alpha}{mR}.$$

Сравнивая это выражение с (7.13), получаем интересную связь:

$$v_{II}^2 = 2v_I^2. \quad (7.25)$$

В частности, в собственно задаче Кеплера, когда  $\alpha = GmM$ ,  $M$  – масса Земли, а  $R$  – ее радиус,  $v_{II}$  есть минимальная скорость, которую нужно сообщить телу, находящемуся на поверхности Земли, чтобы оно ушло на бесконечность. Такая скорость называется *Второй космической скоростью*. Очевидно, что

$$v_{II} = \sqrt{2}v_I \cong 11,2 \text{ км/с}. \quad (7.26)$$

До сих пор считалось, что  $L_0 \neq 0$ . Случай  $L_0 = 0$  достаточно тривиален, хотя и небезынтересен. Здесь центробежный барьер исчезает, и эффективная потенциальная энергия равна обычной:

$$U_{\text{эф}} = -\frac{\alpha}{r}. \quad (7.27)$$

График этой функции изображен на приводившемся рисунке нижней штриховой кривой.

Из него сразу видно, что движение в случае  $L_0 = 0$  возможно при любом значении энергии  $E$ . Когда  $E < 0$ , движение финитное, когда  $E \geq 0$ , движение инфинитное. При этом всегда возможно падение частицы на силовой центр. Когда  $E < 0$  оно происходит всегда, когда  $E > 0$  – в половине случаев (начальная скорость направлена к силовому центру). Все эти результаты становятся совершенно очевидными, если учесть, что равенство  $L_0 = 0$  отвечает тому, что частица движется вдоль прямой, проходящей через силовой центр.

Перейдем теперь к количественному анализу кеплеровского движения. Здесь часто бывает полезным знать интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arccos \left[ \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} \right], \quad [c > 0]. \quad (7.28)$$

Форма траектории получается с помощью общей формулы (4.27):

$$\varphi = \int \frac{\frac{L_0}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{L_0^2}{r^2}}} + Const, \quad (7.29)$$

в которую следует подставить потенциальную энергию (7.6):

$$\varphi = \int \frac{\frac{L_0}{r^2} dr}{\sqrt{2m\left[E + \frac{\alpha}{r}\right] - \frac{L_0^2}{r^2}}} + Const. \quad (7.30)$$

Перепишем это выражение в виде

$$\varphi - \varphi_0 = - \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2mE}{L_0^2} + \frac{2m\alpha}{L_0^2} \left(\frac{1}{r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^2}}, \quad (7.31)$$

где через  $\varphi_0$  мы обозначили постоянную интегрирования, имеющую смысл некоторого угла. Проводя интегрирование с помощью (7.28), получаем

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos \frac{\frac{2}{r} - \frac{2m\alpha}{L_0^2}}{\sqrt{\frac{4m^2\alpha^2}{L_0^4} + 4 \cdot \frac{2mE}{L_0^2}}}. \quad (7.32)$$

Отсчитывая угол от значения  $\varphi_0$  и разрешая (7.32) относительно  $r$ , имеем

$$r = \frac{\frac{L_0^2}{m\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL_0^2}{m\alpha^2}} \cos \varphi}. \quad (7.33)$$

Таким образом, окончательно приходим к следующему уравнению траектории:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (7.34)$$

где

$$p = \frac{L_0^2}{m\alpha} \quad (7.35)$$

и

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL_0^2}{m\alpha^2}}. \quad (7.36)$$

Но (7.34) есть каноническое уравнение *конического сечения с фокусом в начале координат*, т.е. в силовом центре. Величина  $p$  и  $\varepsilon$  называются соответственно *параметром* и *эксцентриситетом* орбиты. При этом точке с  $\varphi = 0$  отвечает минимальное значение  $r$ , т.е. она является *перицентром*. Это проясняет смысл сделанного нами выбора начала отсчета азимутального угла  $\varphi$ .

Из (7.36) явствует, что здесь возможны три случая:

$$1) \quad E < 0 \Rightarrow \varepsilon < 1; \quad (7.37)$$

$$2) \quad E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1; \quad (7.38)$$

$$3) \quad E > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1. \quad (7.39)$$

В первом из них частица движется по *эллипсу*, во втором – по *параболе*, в третьем – по *гиперболе*, в полном соответствии с результатами качественного анализа.

Вспоминая формулы аналитической геометрии, получим следующие характеристики эллиптической орбиты:

а) большая полуось равна

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad (7.40)$$

в соответствии с уже полученным результатом (7.23), – она зависит лишь от энергии, но не от момента импульса;

б) малая полуось равна:

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{L_0}{\sqrt{2m|E|}} \quad (7.41)$$

и связана с большой полуосью и параметром соотношением

$$b^2 = pa; \quad (7.42)$$

в) расстояние от силового центра до перицентра получится, если положить в (7.34)  $\varphi = 0$ :

$$r_{\min} \equiv r_1 = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon); \quad (7.43)$$

г) расстояние от силового центра до апоцентра получается из (7.34), если положить в нем  $\varphi = \pi$  :

$$r_{\max} \equiv r_2 = \frac{P}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon); \quad (7.44)$$

д) период обращения частицы равен:

$$T = \frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{\pi ab}{L_0/2m} = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \quad (7.45)$$

Представим результат (7.45) в несколько иной форме, исключая энергию с помощью (7.40):

$$|E| = \frac{\alpha}{2a}. \quad (7.46)$$

Подстановка этого выражения в (7.45) дает:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}, \quad (7.47)$$

откуда

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha}. \quad (7.48)$$

Для собственно кеплеровского движения  $\alpha = GmM$ , и (7.48) переписывается как

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = Const. \quad (7.49)$$

Таким образом, мы заключаем, что отношение  $T^2/a^3$  одинаково для всех планет солнечной системы, т.е. приходим к третьему закону Кеплера.

Аналогичным образом можно найти геометрические характеристики параболической и гиперболических траекторий, но мы этим заниматься не будем. Кроме того, с помощью формул (4.21) и (4.24) можно получить законы движения частицы в каждом из трех случаев, но они оказываются весьма сложными и записываются лишь в параметрической форме. На этой проблеме мы также не останавливаемся.

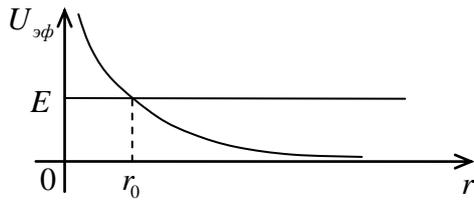
Итак, мы рассмотрели случай, отвечающий движению частицы в поле с потенциальной энергией (7.6), когда она притягивается к силовому центру силой, пропорциональной  $1/r^2$ . Обсудим теперь кратко случай *отталкивания*, когда

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0. \quad (7.50)$$

Здесь эффективная потенциальная энергия равна

$$U_{\text{эф}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{L_0^2}{2mr^2} \quad (7.51)$$

и монотонно убывает от  $+\infty$  до нуля при изменении  $r$  от нуля до бесконечности (см. рисунок). В соответствии с этим, энергия частицы может быть только *положительной*, и движение всегда является *инфинитным*, без падения на силовой центр. Уравнение траектории находится из формулы, аналогичной (7.30):



$$\varphi = \int \frac{\frac{L_0}{r^2} dr}{\sqrt{2m \left[ E - \frac{\alpha}{r} \right] - \frac{L_0^2}{r^3}}} + Const. \quad (7.52)$$

Выкладки, полностью аналогичные проводившимся выше, дают:

$$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi} \quad (7.53)$$

со значениями  $p$  и  $\varepsilon$ , определяемыми теми же формулами (7.35) и (7.36), что и прежде. Уравнение (7.52) задает при  $E=0$  параболу, а при  $E>0$  – гиперболы. Но если в случае притяжения соответствующие траектории огибали силовой центр (фокусы были внутренними), то теперь траектории проходят *мимо* силового центра (фокусы являются внешними).

И в заключение данного параграфа докажем одно важное утверждение, которое уже упоминалось в §6 в связи с теоремой Бертрана.

Теорема. При движении в центральном поле

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} \quad (7.54)$$

при любом знаке  $\alpha$  сохраняется так называемый вектор *Рунге – Ленца – Лапласа*:

$$\vec{A} \equiv \left[ \vec{v}, \vec{L} \right] + \frac{\alpha \vec{r}}{r} = Const. \quad (7.55)$$

#### Доказательство

Нам нужно убедиться, что полная производная по времени от вектора  $\vec{A}$  равна нулю. Имеем:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[ \dot{\vec{v}}, \vec{L} \right] + \left[ \vec{v}, \dot{\vec{L}} \right] + \frac{\alpha \dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\alpha \vec{r} \dot{r}}{r^2}. \quad (7.56)$$

Но при движении в любом центральном поле момент импульса сохраняется, т.е.  $\dot{\vec{L}} = 0$ . Далее,  $\dot{r}$  есть радиальная составляющая скорости, так что можно записать

$$\dot{r} = v_r \equiv \left( \vec{v}, \vec{e}_r \right) = \left( \vec{v}, \frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (7.57)$$

Это позволяет представить (7.56) в форме

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[ \dot{\vec{v}}, \vec{L} \right] + \frac{\alpha\vec{v}}{r} - \frac{\alpha\vec{r}(\vec{v}, \vec{r})}{r^3}. \quad (7.58)$$

Подставим сюда выражение для момента импульса  $\vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}]$  и раскроем возникающее двойное векторное произведение:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = m\vec{r}(\dot{\vec{v}}, \vec{v}) - m\vec{v}(\dot{\vec{v}}, \vec{r}) + \frac{\alpha\vec{v}}{r} - \frac{\alpha\vec{r}(\vec{v}, \vec{r})}{r^3}. \quad (7.59)$$

Воспользуемся, наконец, Вторым законом Ньютона

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} = \frac{\alpha\vec{r}}{r^3}. \quad (7.60)$$

В итоге первое слагаемое в (7.59) сократится с последним, а второе – с третьим, и мы получим

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 0, \quad (7.61)$$

что и утверждалось.

Как упоминалось в §6, имеет место следующая цепочка логических связей:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Замкнутость траектории} - \text{наличие нового закона сохранения} - \\ \text{существование скрытой симметрии} - \text{наличие дополнительного} \\ \text{квантовомеханического вырождения энергетических уровней.} \end{array} \right.$$

Остановимся кратко на отдельных звеньях этой цепочки. Используя полученные выше характеристики траекторий частицы в задаче Кеплера, нетрудно показать, что вектор  $\vec{A}$  направлен из первого фокуса конического сечения (из силового центра) во второй его фокус. Таким образом, смысл закона сохранения (7.55) в том, что он фиксирует в пространстве направление на перицентр, и тем самым траектория обретает неподвижную ось симметрии. В случае финитного движения это и означает замкнутость орбиты, которая, как мы знаем, является эллипсом.

Анализ второго звена нашей цепочки гораздо более сложен, и сам факт его существования был установлен В.А.Фоком лишь в 1935 г. Он показал, что задача Кеплера имеет в качестве группы инвариантности не просто геометрическую группу трехмерных вращений  $O(3)$ , а обладает более широкой симметрией. Если говорить конкретнее, то соответствующие уравнения не меняют своего вида при четырехмерных вращениях, образующих группу  $O(4)$ . При этом к группе Лоренца – основной группе инвариантности СТО – эта группа скрытой симметрии никакого отношения не имеет.

Анализ последнего звена возможен, естественно, лишь в рамках квантовой механики, и в своем месте мы к нему еще вернемся.

Как отмечалось в §6, приведенная цепочка работает и еще в одном случае – для изотропного осциллятора, т.е. для движения частицы в центральном поле с квадратичной потенциальной энергией. И здесь все траектории замкнуты, имеется новый закон сохранения

(хотя и не имеющий столь наглядного смысла), существует скрытая симметрия (описываемая так называемой унитарной группой  $SU(3)$ ) и возникает дополнительное квантовомеханическое вырождение. Мы на этой проблеме не останавливаемся.

Заметим, что как в классической, так и в квантовой механике сохранение вектора Рунге – Ленца – Лапласа допускает удивительно простое решение задачи Кеплера. Рассмотрим классический случай и разложим вектор  $\vec{A}$  по ортам полярной системы координат. Учтывая, что

$$[\vec{v}, \vec{L}_0] = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & L_0 \end{vmatrix} = r\dot{\varphi}L_0\vec{e}_r - \dot{r}L_0\vec{e}_\varphi, \quad (7.62)$$

имеем:

$$\vec{A} = (r\dot{\varphi}L_0 + \alpha)\vec{e}_r - \dot{r}L_0\vec{e}_\varphi. \quad (7.63)$$

Умножим обе части равенства (7.63) скалярно на  $\vec{r}$ :

$$(\vec{r}, \vec{A}) = r(r\dot{\varphi}L_0 + \alpha), \quad (7.64)$$

или

$$A \cos \varphi = r\dot{\varphi}L_0 + \alpha, \quad (7.65)$$

где  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{A}$ . Но согласно смыслу вектора  $\vec{A}$ , это есть как раз азимутальный угол, отсчитываемый от направления на перицентр траектории. Подставив в (7.65) выражение  $\dot{\varphi} = L_0 / mr$  и поделив обе части полученного равенства на  $\alpha$ , получим

$$\frac{A}{\alpha} \cos \varphi = 1 + \frac{L_0^2}{m\alpha} \frac{1}{r}, \quad (7.66)$$

откуда

$$r = \frac{\frac{L_0^2}{m\alpha}}{-1 + \frac{A}{\alpha} \cos \varphi}. \quad (7.67)$$

Учитывая возможность как отталкивания, так и притяжения, перепишем (7.67) в виде

$$r = \frac{\pm \frac{L_0^2}{m|\alpha|}}{-1 \pm \frac{A}{|\alpha|} \cos \varphi} = \frac{\frac{L_0^2}{m|\alpha|}}{\mp 1 + \frac{A}{|\alpha|} \cos \varphi}, \quad (7.68)$$

где верхние знаки отвечают отталкиванию, а нижние – притяжению.

Таким образом, окончательно приходим к следующим уравнениям траектории частицы:

$$r = \frac{p}{\mp 1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (7.69)$$

где

$$p = \frac{L_0^2}{m|\alpha|} \quad (7.70)$$

и

$$\varepsilon = \frac{A}{|\alpha|}. \quad (7.71)$$

Но именно эти результаты и были получены в процессе непосредственного решения задачи Кеплера. Выражение для параметра  $p$  совпадает с его выражением (7.35), а из (7.71) получаем связь модуля вектора Рунге – Ленца – Лапласа с характеристиками траектории и взаимодействия:

$$A = |\alpha| \cdot \varepsilon. \quad (7.72)$$

Имея в виду последнее равенство, вектор  $\vec{A}$  иногда называют *вектором эксцентриситета*. Формулу (7.71) можно получить и непосредственно из выражения (7.63).

## §8 Упругое рассеяние частиц

Общеизвестна та фундаментальная роль, которую играет в современной физике *метод рассеяния*. Мы о нем уже говорили в курсе СТО, в связи с системами асимптотически невзаимодействующих частиц. Обсудим теперь это более подробно, по необходимости ограничиваясь пока рамками классической механики. При этом будем рассматривать только *упругое рассеяние* частиц, не сопровождающееся их превращениями и изменениями внутренних состояний:

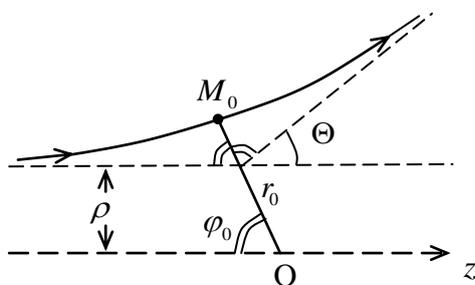
$$a + b \rightarrow a + b. \quad (8.1)$$

В данном параграфе анализируются *индивидуальные акты рассеяния*. При этом существенно, что классическая частица движется строго детерминировано, что позволяет, в частности, говорить о ее траектории (в квантовой механике это не так!).

Задача рассеяния с этой точки зрения представляет собой проблему двух тел. Но, как мы видели в §3, она может быть сведена к задаче о движении одной частицы с приведенной массой во внешнем поле, создаваемом неподвижным силовым центром. Для этого достаточно перейти в систему центра масс исходных частиц, т.е. выделить их относительное движение. При необходимости путем простых кинематических преобразований всегда можно осуществить обратный переход в лабораторную систему отсчета, но мы на этой проблеме не останавливаемся.

Итак, вместо процесса (8.1) мы будем анализировать рассеяние частицы *неподвижным силовым центром*, не ограничивая при этом общности. Такая постановка задачи представляет и значительный самостоятельный интерес, ибо она отвечает рассеянию достаточно легких частиц на весьма массивных частицах. Сюда можно отнести опыты Резерфорда по рассеянию  $\alpha$  – частиц на атомных ядрах, опыты Ховштадтера по рассеянию электронов на ядрах и на нуклонах и многие другие важные эксперименты.

Так или иначе, рассматриваем следующую задачу. Имеется силовой центр  $O$ , на который из бесконечности падает частица массы  $m$ , обладающая энергией  $E$  и моментом импульса  $L_0$ . Считается, что поле силового центра является центральным, а значит, и потенциальным. Требуется найти угол рассеяния  $\theta$ , характеризующий отклонение частицы от ее первоначального направления движения (см. рисунок).



Для решения поставленной задачи вновь вспомним законы сохранения энергии и момента импульса:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = E \quad \text{и} \quad mr^2\dot{\phi} = L_0. \quad (8.2)$$

Исключая из них  $\dot{\phi}$ , получим закон сохранения энергии для радиальной составляющей движения:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \left\{ U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2} \right\} = E. \quad (8.3)$$

Исключая же из (8.2) время, приходим к дифференциальному уравнению траектории:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L_0/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)] - \frac{L_0^2}{m^2 r^2}}}. \quad (8.4)$$

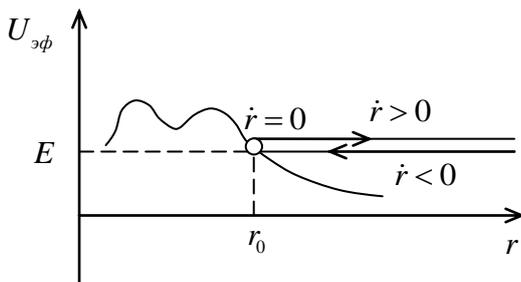
Уравнение (8.3) дает нам выражение для радиальной составляющей скорости:

$$\dot{r} = \frac{1}{m} \sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{L_0^2}{r^2}}, \quad (8.5)$$

а уравнение (8.4) определяет уравнение траектории:

$$\varphi = \int \frac{\frac{L_0}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{L_0^2}{r^2}}}. \quad (8.6)$$

С точки зрения только радиальной составляющей движение частицы происходит следующим образом. Она летит на бесконечности к силовому центру ( $\dot{r} < 0$ ). Затем в



некоторой точке – в точке поворота, которой соответствует значение  $r = r_0$ , – частица «наталкивается» на кривую эффективной потенциальной энергии ( $\dot{r} = 0$ ). После этого она вновь уходит на бесконечность ( $\dot{r} > 0$ ). Положение точки поворота находится из условия  $\dot{r} = 0$ , т.е., согласно (8.5), из уравнения

$$2m[E-U(r)] - \frac{L_0^2}{r^2} = 0. \quad (8.7)$$

В точке поворота квадратный корень в (8.5) меняет свой знак.

Вместе с этим меняет знак и подынтегральное выражение в (8.6). Поэтому, если отсчитывать азимутальный угол  $\varphi$  от направления  $OM_0$ , то одним и тем же значениям  $r$  по разные стороны от точки  $M_0$  будут соответствовать углы, равные по величине, но противоположные по знаку. Иными словами, траектория частицы симметрична относительно прямой  $OM_0$ . Это означает, что обе асимптоты траектории пересекут эту прямую под одинаковыми углами, которые обозначим через  $\varphi_0$  (см. рисунок). Тогда угол рассеяния будет равен

$$\theta = \pi - 2\varphi_0. \quad (8.8)$$

Но угол  $\varphi_0$  есть просто азимутальный угол бесконечно удаленной точки. Согласно (8.6), он равен

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\frac{L_0}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{L_0^2}{r^2}}}. \quad (8.9)$$

Формулы (8.7) – (8.9) полностью решают поставленную задачу об отыскании угла рассеяния  $\theta$ .

Однако при анализе рассеяния начальное состояние частицы удобнее задавать не энергией  $E$  и моментом импульса  $L_0$ , другой парой величин. Одной из них является  $v_\infty$  – скорость частицы на бесконечности. Через нее энергия записывается как

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}. \quad (8.10)$$

Другая величина – *прицельный параметр*  $b$  (см. рисунок), т.е. расстояние от траектории до оси  $Oz$  при  $z \rightarrow -\infty$ . Иными словами, прицельный параметр – это расстояние, на котором частица прошла бы мимо силового центра при «выключенном» поле. Момент импульса выражается через введенные величины как

$$L_0 = mv_\infty \cdot b. \quad (8.11)$$

Выражения (8.10) – (8.11) и следует поставить в (8.7) – (8.9).

Таким образом, процедура отыскания угла рассеяния  $\theta$  сводится к следующему.

а) Находим точку поворота, т.е. значение  $r = r_0$ , из уравнения

$$1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2} = 0. \quad (8.12)$$

б) Находим угол  $\varphi_0$ , вычисляя интеграл

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{b \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}}. \quad (8.13)$$

в) Находим угол  $\theta$  по формуле

$$\theta = \pi - 2\varphi_0. \quad (8.14)$$

В итоге определяется зависимость  $\theta$  от  $\rho$  и от энергии  $E$  (как от параметра):

$$\theta = \theta(\rho|E). \quad (8.15)$$

Отсюда можно выразить прицельный параметр  $\rho$  через угол рассеяния  $\theta$  (и через энергию  $E$ ).

§9. Дифференциальное сечение рассеяния

В физических приложениях имеют дело не с индивидуальными актами рассеяния отдельных частиц, а с процессом рассеяния целого пучка одинаковых частиц, обладающих одинаковыми скоростями  $\vec{v}_\infty$ . Различные частицы в пучке имеют различные прицельные параметры, а потому рассеиваются под разными углами  $\theta$ . Весь процесс в целом естественно трактовать статистически, поскольку экспериментально измеряется общее число частиц, рассеянных в тот или иной интервал углов. Введем в связи с этим одно из важнейших понятий современной физики.

Обозначим через  $dN(\theta|E)$  число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы в интервале от  $\theta$  до  $\theta+d\theta$ . При этом мы учитываем, что система в целом обладает аксиальной симметрией относительно оси  $Oz$ , т.е. относительно направления падающего пучка, а потому это число не зависит от соответствующего азимутального угла. Но само по себе  $dN(\theta|E)$  неудобно для характеристики процесса рассеяния, так как зависит не только от характера взаимодействия частиц с силовым центром, но и от *плотности потока* падающих частиц. Обозначим эту последнюю величину через  $N$ . Она представляет собой число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка, который предполагается однородным.

Определение. Величина

$$d\sigma(\theta|E) = \frac{dN(\theta|E)}{N} \quad (9.1)$$

называется *эффективным сечением рассеяния*.

Число частиц  $dN$  имеет размерность обратного времени, а плотность потока  $N$  – размерность  $T^{-1}L^{-2}$ . Поэтому эффективное сечение обладает размерностью площади:

$$[d\sigma] = L^2 \quad (9.2)$$

и измеряется в квадратных сантиметрах ( в системе СИ – в квадратных метрах). В атомной и ядерной физике употребляется единица сечения, называемая *барном*:

$$1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2. \quad (9.3)$$

Очевидно, что  $d\sigma$  пропорционально элементу угла  $d\theta$ , а потому можно записать

$$d\sigma(\theta|E) = \rho_\theta(\theta|E)d\theta, \quad (9.4)$$

или

$$d\sigma(\theta|E) = \frac{d\sigma}{d\theta}(\theta|E)d\theta. \quad (9.5)$$

Определение. Величина  $d\sigma/d\theta$ , определяемая формулой (9.5) и имеющая смысл «плотности» эффективного сечения, называется *дифференциальным сечением рассеяния*.

Дифференциальное сечение рассеяния, точнее его зависимость от угла рассеяния  $\theta$  и от энергии  $E$  падающих частиц, полностью определяется видом рассеивающего поля и служит важнейшей характеристикой процесса рассеяния.

Очень часто эффективное рассеяние относят не к элементу плоского угла  $d\theta$ , а к элементу кольцевого телесного угла  $d\Omega$  (см. нижеследующий рисунок), записывая вместо (9.4)

$$d\sigma(\theta|E) = \rho_\Omega(\theta|E)d\Omega \quad (9.6)$$

или

$$d\sigma(\theta|E) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta|E)d\Omega. \quad (9.7)$$

Величину  $d\sigma/d\Omega$  также именуют дифференциальным сечением рассеяния. Имея в виду очевидное соотношение

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta, \quad (9.8)$$

получаем следующую простую связь между двумя введенными дифференциальными сечениями:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta|E) = \frac{1}{2\pi \sin\theta} \frac{d\sigma}{d\theta}(\theta|E). \quad (9.9)$$

Интегрируя дифференциальное сечение по всем направлениям, получим *полное сечение* упругого рассеяния:

$$\sigma(E) = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta|E)d\Omega = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\theta}(\theta|E)d\theta. \quad (9.10)$$

Для выяснения его смысла рассмотрим реальный процесс рассеяния, когда пучок частиц падает не на один силовой центр, а на мишень, включающую большое количество частиц-рассеивателей. Обозначим их плотность, т.е. количество, приходящееся на единицу площади мишени, через  $N_0$ . Тогда можно будет записать, очевидно,

$$\frac{\Delta N}{N} = N_0 \sigma = \frac{\sum \sigma}{S}, \quad (9.11)$$

где  $S$  – площадь мишени. Таким образом, общая доля рассеянных частиц  $\Delta N/N$  равна доле площади мишени, занимаемой полными сечениями.

Еще более наглядный смысл полное сечение приобретает, если можно считать, что взаимодействие осуществляется всякий раз, когда частица  $a$  «сталкивается» с частицей  $b$ , т.е. обе они являются как бы шариками с некоторыми радиусами  $R_a$  и  $R_b$  соответственно. В этом случае величина  $\sigma$  просто совпадает с общим геометрическим сечением частиц  $a$  и  $b$  т.е. с площадью кружочка радиусом  $R_a + R_b$ :

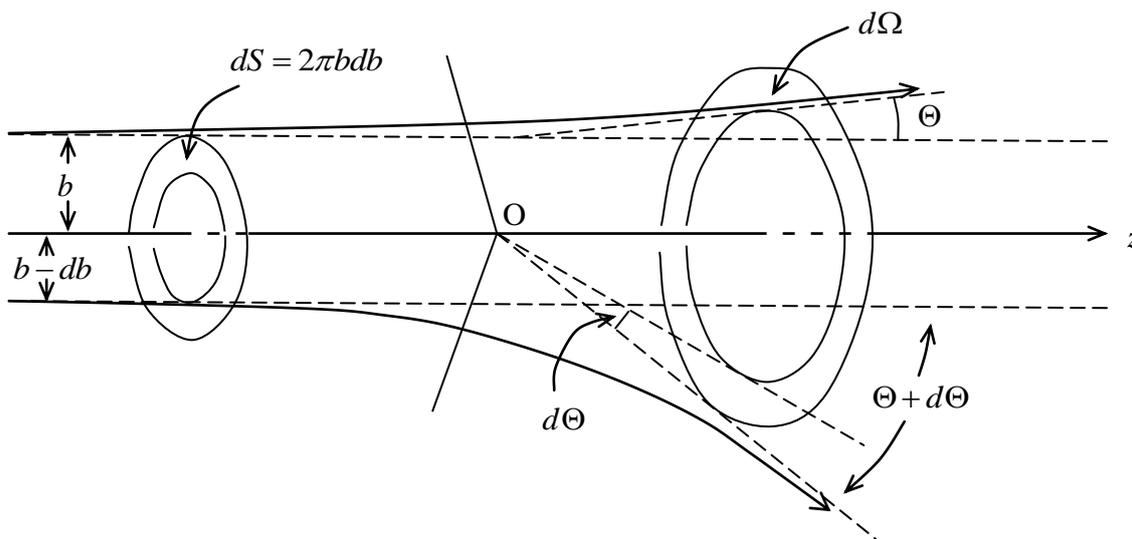
$$\sigma = \pi(R_a + R_b)^2. \quad (9.12)$$

Именно так рассматриваются процессы соударения в курсе общей физики, при анализе явлений, обусловленных столкновениями молекул в газах.

Подобная интерпретация зачастую весьма полезна, особенно при первоначальном ознакомлении с предметом. Она делает наглядным и интуитивно понятным столь абстрактное понятие, как сечение рассеяния. Однако следует иметь в виду, что эта интерпретация является все же достаточно грубой и иногда может приводить к качественно

неверным выводам. Даже в классической физике частицы вовсе не твердые шарики, и они могут взаимодействовать, не «столкнувшись» друг с другом. Недаром сечение рассеяния зависит, как правило, от энергии рассеиваемых частиц. Особенно неадекватна приведенная интерпретация сечения в квантовой механике, где нужно существенно учитывать вероятностный характер протекания всех процессов.

Опишем теперь процедуру вычисления сечений рассеяния. Для нахождения эффективного сечения  $d\sigma$  заметим, что если частица с прицельным параметром  $b$  рассеивается на угол  $\theta$ , то на угол  $\theta + d\theta$  рассеивается частица с прицельным параметром  $b - db$ . Поэтому  $d\sigma$  равно числу частиц, пролетающих в единицу времени через кольцо радиусами  $b$  и  $b - db$  (см. рисунок).



Таким образом,

$$dN = NdS = N \cdot 2\pi b db, \quad (9.13)$$

откуда

$$d\sigma(\theta|E) = 2\pi b(\theta|E) \cdot |db(\theta|E)|. \quad (9.14)$$

Знак модуля здесь учитывает, что функция  $b = b(\theta)$  является, как правило, монотонно убывающей, и поэтому  $db(\theta) < 0$  при  $d\theta > 0$ . Для дифференциального сечения из (9.14) имеем

$$\frac{d\sigma}{d\theta}(\theta|E) = 2\pi b(\theta|E) \cdot \left| \frac{db(\theta|E)}{d\theta} \right|, \quad (9.15)$$

или, в соответствии с (9.9),

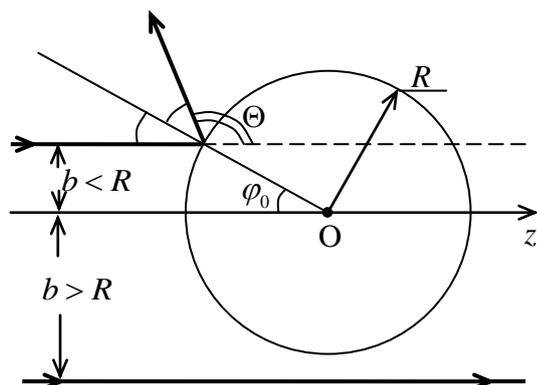
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta|E) = \frac{b(\theta|E)}{\sin\theta} \left| \frac{db(\theta|E)}{d\theta} \right|. \quad (9.16)$$

Итак, вычисление дифференциального сечения упругого рассеяния сводится в классической механике к определению зависимости  $\theta = \theta(b|E)$ , откуда находится  $b = b(\theta|E)$ . Решение же этой задачи приведено в §8.

**Пример** Рассмотрим простой пример, почти не требующий никаких вычислений. А именно, вычислим сечение рассеяния точечных частиц на неподвижном твердом шарике

радиуса  $R$ , считая соударения абсолютно упругими. В данном случае угол падения равен углу отражения, и, как явствует из рисунка,

$$b(\theta) = R \sin \varphi_0 = R \sin \frac{\pi - \theta}{2} = R \cos \frac{\theta}{2}.$$



Подстановка в формулу (9.16) дает

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta|E) = \frac{1}{4} R^2. \quad (9.17)$$

Таким образом, рассеяние в данном случае является изотропным, т.е. одинаковым по всем направлениям. Интегрируя по сферическим углам, для полного сечения найдем

$$\sigma = \pi R^2, \quad (9.18)$$

в полном соответствии со смыслом классического сечения ( см. (9.12)).

§10. Формула Резерфорда

Гораздо более интересен случай рассеяния заряженных частиц на кулоновском силовом центре, когда

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}. \quad (10.1)$$

Угол  $\varphi_0$  выражается с помощью общей формулы (8.13):

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{mv_{\infty}^2} \cdot \frac{1}{r}}}, \quad (10.2)$$

в которую подставлена потенциальная энергия (10.1). Полученный интеграл вычисляем путем замены переменной  $1/r = x$  с последующим применением формулы (7.28) (сравн. с получением выражения (7.32)):

$$\varphi_0 = - \int_{1/r_0}^0 \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{2\alpha}{mb^2v_{\infty}^2} \left(\frac{1}{r}\right)}} = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{2\alpha}{mb^2v_{\infty}^2} x - x^2}},$$

или

$$\varphi_0 = \arccos \left\{ \frac{x + \frac{\alpha}{mb^2v_{\infty}^2}}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \left(\frac{\alpha}{mb^2v_{\infty}^2}\right)^2}} \right\} \Bigg|_0^{x_0}. \quad (10.3)$$

Величина  $x_0 = 1/r_0$  находится из уравнения (8.12), которое в нашем случае записывается как

$$1 - b^2 x^2 - \frac{2\alpha}{mv_{\infty}^2} x = 0. \quad (10.4)$$

При подстановке корня этого уравнения фигурная скобка в (10.3) обращается в 1, так что вклад верхнего предела интегрирования равен нулю, и мы получаем

$$\varphi_0 = - \arccos \left\{ \frac{\frac{\alpha}{mbv_{\infty}^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mbv_{\infty}^2}\right)^2}} \right\}, \quad (10.5)$$

откуда

$$\cos^2 \varphi_0 = \frac{\left(\frac{\alpha}{mbv_\infty^2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\alpha}{mbv_\infty^2}\right)^2}. \quad (10.6)$$

Разрешая (10.6) относительно  $b^2$ , найдем

$$b^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{tg}^2 \varphi_0. \quad (10.7)$$

Учтем теперь, что, согласно (8.14),

$$\varphi_0 = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad (10.8)$$

а потому, (10.7) записывается как

$$\frac{1}{2} b^2 = \frac{\alpha^2}{2m^2 v_\infty^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (10.9)$$

Дифференцируя обе части этого равенства по  $\theta$ , сразу получим нужную нам комбинацию:

$$b \frac{db}{d\theta} = \frac{-\alpha^2}{2m^2 v_\infty^4} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (10.10)$$

Подстановка этого выражения в формулу (9.15) дает для дифференциального сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\pi \alpha^2}{2m^2 v_\infty^4} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}. \quad (10.11)$$

Однако, как уже говорилось, обычно эффективное сечение относят к элементу телесного угла, т.е. пользуются формулой (9.16), которая дает:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta|E) = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (10.12)$$

Заменяя скорость  $v_\infty$  через энергию  $E$  с помощью равенства

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = E \quad (10.13)$$

и записывая константу  $\alpha$  в кулоновской потенциальной энергии как

$$\alpha = zZe^2, \quad (10.14)$$

где  $ze$  – заряд рассеиваемой частицы, а  $Ze$  – заряд частицы мишени, приходим к знаменитой формуле Резерфорда:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta|E) = \frac{z^2 Z^2 e^4}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (10.15)$$

Роль, которую она сыграла в становлении ядерной физики, а стало быть, и всей современной физики, общеизвестна.

Если с помощью (10.15) попытаться вычислить полное сечение резерфордовского рассеяния, то мы получим бесконечность:

$$\sigma = \infty. \quad (10.16)$$

Причина, разумеется, в том, что электростатические силы являются силами далекого действия, и сфера их влияния простирается до бесконечности. Основной вклад в рассеяние дают как раз частицы с большими прицельными параметрами, которым отвечают малые углы  $\theta$ . Это приводит к появлению в дифференциальном сечении (10.15) характерного множителя  $\sin^{-4} \theta/2$ . Он обладает резко сингулярным поведением при  $\theta=0$ , которое и обуславливает расходимость интеграла (9.10) при вычислении полного сечения.

Таким образом, замена кулоновского потенциала каким-то эффективным твердым шариком, обуславливающим такой же полный эффект рассеяния, не удастся. Это еще раз подчеркивает, что к приводившейся выше интерпретации полного сечения рассеяния в общей ситуации следует относиться с достаточной осторожностью.

Заметим, что строгий квантовомеханический расчет рассеяния на кулоновом центре также приводит к формуле Резерфорда (10.15).

§11. Малые колебания

Рассматриваем консервативную систему частиц с  $L$  степенями свободы и со стационарными связями, обладающую положением устойчивого равновесия. Нас будет интересовать движение системы вблизи этого положения равновесия, которое и называется *малыми колебаниями*. Такая терминология оправдывается всем последующим анализом.

Обозначив обобщенные координаты через  $\eta_i$ , будем иметь следующую функцию Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} a_{ij}(\{\eta_k\}) \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - U(\{\eta_k\}) \equiv T - U. \quad (11.1)$$

При записи кинетической энергии учтено, что она, в силу стационарных связей, должна быть однородной квадратичной формой скоростей (с коэффициентами, вообще говоря, зависящими от координат).

Пусть устойчивому равновесию отвечают значения координат

$$\eta_i = \eta_i^*. \quad (11.2)$$

Введем новые обобщенные координаты

$$q_i = \eta_i - \eta_i^*, \quad (11.3)$$

удобные тем, что равновесию отвечают их нулевые значения:

$$q_i^* = 0. \quad (11.4)$$

Кроме того, договоримся за уровень отсчета потенциальной энергии принимать ее значение в положении равновесия, так что полагаем

$$U(0, \dots, 0) = 0. \quad (11.5)$$

При всех соглашениях лагранжиан (11.1) переписется как

$$L = \frac{1}{2} A_{ij}(\{q_k\}) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(\{q_k\}). \quad (11.6)$$

Поскольку нас интересует движение системы лишь в непосредственной окрестности положения устойчивого равновесия (малые  $q_i$  и малые  $\dot{q}_i$ ), то разложим функцию Лагранжа в ряд Тейлора, удерживая лишь первые нетривиальные члены по  $q_i$  и  $\dot{q}_i$ .

Кинетическая энергия уже содержит вторые степени скоростей, т.е. уже является величиной, по крайней мере, второго порядка малости. Поэтому в разложении  $A_{ij}$  достаточно оставить лишь нулевые члены:

$$A_{ij}(q_1, \dots, q_l) \cong A_{ij}(0, \dots, 0) \equiv m_{ij}. \quad (11.7)$$

Таким образом, в принятом приближении кинетическая энергия представляет собой однородную *квадратичную форму* от обобщенных скоростей с постоянными коэффициентами:

$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j . \quad (11.8)$$

Очевидно, что эта квадратичная форма – *положительно определенная*, а потому ее коэффициенты  $m_{ij}$  должны удовлетворять целому ряду неравенств.

Разлагаем теперь потенциальную энергию, удерживая члены второго порядка малости включительно:

$$U(q_1, \dots, q_l) \cong U(0, \dots, 0) + \frac{\partial U}{\partial q_i}(0, \dots, 0) \cdot q_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(0, \dots, 0) \cdot q_i q_j . \quad (11.9)$$

Но нулевой член здесь равен нулю в силу соглашения (11.5). Равны нулю и все члены первого порядка малости, ибо в положении равновесия  $\partial U / \partial q_i = 0$ , т.е. достигается экстремум потенциальной энергии  $U$  (см. предыдущую главу). В итоге остаются лишь члены, квадратичные по координатам. Вводя обозначения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(0, \dots, 0) \equiv K_{ij} , \quad (11.10)$$

мы для потенциальной энергии в принятом приближении получим

$$U(q_1, \dots, q_l) = \frac{1}{2} K_{ij} q_i q_j . \quad (11.11)$$

Она представляет собой *квадратичную форму* от обобщенных координат с постоянными коэффициентами. Кроме того, эта квадратичная форма также является *положительно определенной*. Ведь мы рассматриваем устойчивое равновесие, в котором достигается минимум потенциальной энергии ( см. предыдущую главу), равный, в силу (11.5), нулю. В окрестности этого минимума функция  $U$  строго положительна.

В итоге приходим к следующему приближенному выражению для функции Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} k_{ij} q_i q_j , \quad (11.12)$$

где  $m_{ij}$  и  $k_{ij}$  – некоторые константы, удовлетворяющие ряду неравенств, которые вытекают из положительной определенности соответствующих квадратичных форм. Оба набора коэффициентов образуют квадратичные матрицы порядка  $l \times l$ , причем матрицы симметричные.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы ( $l = 1$ ). Вводя обозначения

$$q_1 \equiv x, \quad m_{11} \equiv m, \quad k_{11} \equiv k , \quad (11.13)$$

перепишем лагранжиан (1 1.12) в виде

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} . \quad (11.14)$$

Ему соответствует уравнение Лагранжа

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (11.15)$$

которое подробнейшим образом было изучено в курсе общей физики. Общее решение этого уравнения

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (11.16)$$

отвечает гармоническому колебанию с амплитудой  $A$  и начальной фазой  $\varphi_0$ , которые определяются начальными условиями. Частота же колебаний  $\omega$  равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (11.17)$$

Следующий по сложности случай дает нам система с *двумя степенями свободы* ( $l = 2$ ). Эта задача отражает все существенные особенности общей ситуации, и, разобравшись в ней, легко провести анализ и для системы с любым числом степеней свободы. Исследованием этой задачи мы и ограничимся, чтобы не обременять запись многочисленными индексами и суммированиями.

Введем обозначения:

$$q_1 \equiv x, \quad q_2 \equiv y; \quad m_{11} \equiv a, \quad m_{12} = m_{21} \equiv b, \quad m_{22} \equiv c; \quad k_{11} \equiv \alpha, \quad k_{12} = k_{21} \equiv \beta, \quad k_{22} \equiv \gamma, \quad (11.18)$$

в которых лагранжиан (11.12) записывается как

$$L = \frac{1}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2). \quad (11.19)$$

Условия положительности квадратичных форм  $T$  и  $U$  накладывают на коэффициенты следующие условия:

$$a > 0, \quad c > 0, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 > 0 \quad (11.20)$$

и

$$\alpha > 0, \gamma > 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta^2 > 0. \quad (11.21)$$

Лагранжиан (11.19) приводит к следующим уравнениям движения:

$$\left. \begin{aligned} a\ddot{x} + b\ddot{y} + \alpha x + \beta y &= 0 \\ b\ddot{x} + c\ddot{y} + \beta x + \gamma y &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11.22)$$

По сути дела, физика здесь кончается и начинается теория дифференциальных уравнений. Нам нужно решить систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя неизвестными функциями  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$ . Эти уравнения линейные и однородны, причем коэффициенты в них постоянны. Подобные системы исчерпывающим образом изучены в математике.

Частное решение системы уравнений (11.22) можно искать в виде

$$x = C \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad y = D \cos(\omega t + \varphi), \quad (11.23)$$

где  $C, D$  – амплитуды,  $\varphi$  – общая начальная фаза,  $\omega$  – общая частота колебаний, причем все эти величины неизвестны. Заметим, что вместо решения (11.23) можно пользоваться и решением с «отрицательной» частотой  $-\omega$ . Оно эквивалентно решению (11.23), отличаясь от него лишь знаком начальной фазы. Например,

$$\tilde{x} = C \cdot \cos(-\omega t + \varphi) = C \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Однако в теоретической физике гораздо более широкое распространение получили комплексная форма описания периодических процессов, и к ней пора начинать привыкать. И в комплексном формализме частное решение системы уравнений (11.22) ищется в виде

$$\hat{x} = \hat{A} \cdot e^{i\omega t}, \quad \hat{y} = \hat{B} \cdot e^{i\omega t}, \quad (11.24)$$

где  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$  – комплексные координаты:

$$\hat{x} = x + ix' \quad \hat{y} = y + iy', \quad (11.25)$$

а  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  – комплексные амплитуды:

$$\hat{A} = A + iA', \quad \hat{B} = B + iB'. \quad (11.26)$$

После того, как найдены  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$ , из них нужно выделить вещественные (или мнимые) части, в итоге мы получим, например,

$$x = \operatorname{Re} \hat{x} = \operatorname{Re} \{ \hat{A} e^{i\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ (A + iA') (\cos \omega t + i \sin \omega t) \},$$

т.е.

$$x = A \cos \omega t - A' \sin \omega t, \quad (11.27)$$

или

$$x = C \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (11.28)$$

где

$$C = \sqrt{A^2 - A'^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{A'}{A}. \quad (11.29)$$

Решение (11.28) тождественно решению  $x$  в вещественном формализме (см. (11.23)).

Заметим, что, выделяя из  $\hat{x}$  мнимую часть, мы получим

$$x' = \operatorname{Im} \hat{x} = \operatorname{Im} \{ \hat{A} e^{i\omega t} \} = \operatorname{Im} \{ (A + iA') (\cos \omega t + i \sin \omega t) \},$$

т.е.

$$x' = A' \cos \omega t + A \sin \omega t, \quad (11.30)$$

или

$$x' = C' \cos(\omega t + \varphi'), \quad (11.31)$$

где

$$C' = \sqrt{A'^2 + A^2} = C, \quad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{A}{A'} = -\operatorname{ctg} \varphi. \quad (11.32)$$

Это решение линейно зависимо от  $x$ , отличаясь от (1.1.28) лишь сдвигом начальной фазы на  $\pi/2$ .

Кроме того, и в комплексном формализме можно пользоваться решением с «отрицательной» частотой  $-\omega$ , которое дает

$$\tilde{x} = \operatorname{Re} \hat{\tilde{x}} = \operatorname{Re} \left\{ \hat{A} e^{-i\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ (A + iA') (\cos \omega t - i \sin \omega t) \right\},$$

т.е.

$$\tilde{x} = A \cos \omega t + A' \sin \omega t, \quad (11.33)$$

или

$$\tilde{x} = \tilde{C} \cos(\omega t + \tilde{\varphi}), \quad (11.34)$$

где

$$\tilde{C} = \sqrt{A^2 + A'^2} = C, \quad \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = \frac{A'}{A} = -\operatorname{tg} \varphi. \quad (11.35)$$

Это решение также линейно зависимо с (11.28), отличаясь только знаком начальной фазы.

В дальнейшем, при отыскании частных решений (11.24), мы будем пользоваться только положительными частотами, выделяя из  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$  лишь вещественные части.

Комплексный формализм удобен тем, что при дифференцировании экспонента переходит в себя, тогда как косинус превращается в синус (да еще с обратным знаком) и наоборот. Однако при оперировании с комплексными экспонентами следует соблюдать известную осторожность, поскольку непосредственный смысл имеют не они сами, а их вещественные (или мнимые) части. Это означает, что к таким экспонентам можно применять только линейные операции – умножение на числа, сложение, дифференцирование и интегрирование. Нелинейные операции приводят к неверным окончательным результатам, так как, например,

$$\operatorname{Re} \left\{ \left[ e^{i\omega t} \right]^2 \right\} = \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\omega t} \right\} = \cos 2\omega t \neq \left\{ \operatorname{Re} \left[ e^{i\omega t} \right] \right\}^2 = \cos^2 \omega t.$$

Нам они в дальнейшем не встретятся.

Итак, ищем частное решение системы дифференциальных уравнений (11.22) в виде (11.24). Подставляя функции (11.24), производя дифференцирования и сокращение на экспоненциальный множитель, приходим к системе алгебраических уравнений с неизвестными комплексными амплитудами  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  и с неизвестным параметром  $\omega$ :

$$\left. \begin{aligned} (a\omega^2 - \alpha)\hat{A} + (b\omega^2 - \beta)\hat{B} &= 0 \\ (b\omega^2 - \beta)\hat{A} + (c\omega^2 - \gamma)\hat{B} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11.35^*)$$

Это есть система линейных однородных уравнений.

Для того, чтобы она обладала нетривиальными решениями, должен обращаться в нуль ее детерминант:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a\omega^2 - \alpha & b\omega^2 - \beta \\ b\omega^2 - \beta & c\omega^2 - \gamma \end{vmatrix} = 0. \quad (11.36)$$

Раскрывая его, получим характеристическое уравнение

$$(a\omega^2 - \alpha)(c\omega^2 - \gamma) - (b\omega^2 - \beta)^2 = 0, \quad (11.37)$$

представляющее собой квадратное уравнение относительно  $\omega^2$ . В общей ситуации оно имеет два различных вещественных положительных корня  $\omega_{1,2}^2$ , которые дают две (положительные) величины  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

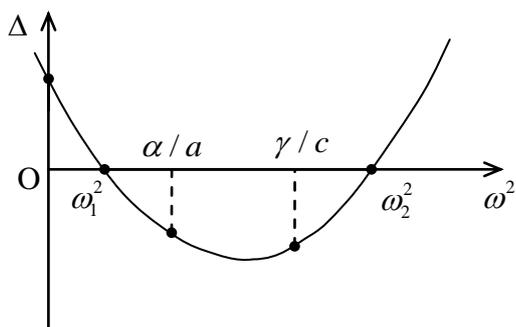
Определение. Найденные указанным способом две величины  $\omega_1$  и  $\omega_2$  называются *собственными частотами* системы.

Вещественность и положительность корней  $\omega_{1,2}^2$  уравнения (11.37) очевидна из физических соображений. В противном случае у  $\omega_1$  и  $\omega_2$  были бы мнимые части. Они привели бы к появлению в  $x$  и  $y$ , а также в  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ , множителей, экспоненциально возрастающих или убывающих во времени. Но наличие таких множителей противоречит закону сохранения энергии  $E = T + U$ .

В вещественности и положительности корней  $\omega_{1,2}^2$  в нашем случае легко убедиться и непосредственно, просто решив уравнение (11.37) и исследовав эти решения. Но эта процедура весьма громоздка. Вместо нее мы проведем качественный анализ, построив график функции  $\Delta = \Delta(\omega^2)$ . Для этого воспользуемся следующей таблицей, где определенности ради считается, что  $\alpha/a < \gamma/c$ :

$\omega^2$	0	$\alpha/a > 0$	$\gamma/c > 0$	$+\infty$
$\Delta(\omega^2)$	$\alpha\gamma - \beta^2 > 0$	$\left(-b\frac{\alpha}{a} - \beta\right)^2 < 0$	$-\left(b\frac{\gamma}{c} - \beta\right)^2 < 0$	$+\infty$

Во второй строке второй колонки и в первой строке третьей и четвертой колонок учтены условия положительности (11.20) – (11.21) кинетической и потенциальной энергий.



В итоге мы заключаем, что парабола, представляющая зависимость  $\Delta = \Delta(\omega^2)$ , имеет вид, изображенный на рисунке. Отсюда сразу видна вещественность и положительность корней  $\omega_1^2$  и  $\omega_2^2$ .

Элементарно устанавливается, что *вырождение*, т.е. слияние частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  возникает

лишь в том случае, когда

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}, \quad (11.38)$$

т.е. в случае, когда матрицы кинетической и потенциальной энергий пропорциональны друг другу. Этот случай не представляет никакого интереса ввиду его тривиальности, и потому в дальнейшем считается, что  $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$ . Заметим, однако, что для систем с числом степеней свободы  $l > 2$  явление вырождения некоторых собственных частот представляет значительный физический интерес, ибо оно возникает всякий раз, когда равновесное состояние системы обладает определенной симметрией. Такая ситуация возникает сплошь и рядом при анализе колебательных спектров симметричных многоатомных молекул в

квантовой механике. Но на общей процедуре решения уравнений движения наличие вырождения практически никак не сказывается.

Итак, решаем характеристическое уравнение (11.37) и находим два его (различных) положительных корня  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Подставляем один из них, скажем, в первое уравнение (11.35):

$$(a\omega_1^2 - \alpha)\hat{A} + (b\omega_1^2 - \beta)\hat{B} = 0. \quad (11.39)$$

При  $\omega = \omega_1$  второе уравнение есть следствие первого, а потому оно ничего нового не даст. Из (11.39) получаем следующее решение системы алгебраических уравнений (11.35):

$$\hat{A} = (b\omega_1^2 - \beta)\hat{\lambda}_1, \quad \hat{B} = (\alpha - a\omega_1^2)\hat{\lambda}_1, \quad (11.40)$$

где  $\lambda_1$  – произвольное комплексное число. Подстановка этого результата в искомые функции (1.1.24) дает нам первое решение уравнений движения:

$$\hat{x}_1 = \hat{\lambda}_1 (b\omega_1^2 - \beta)e^{i\omega_1 t}, \quad \hat{y}_1 = \hat{\lambda}_1 (\alpha - a\omega_1^2)e^{i\omega_1 t}. \quad (11.41)$$

Совершенно аналогично находится второе их решение:

$$\hat{x}_2 = \hat{\lambda}_2 (b\omega_2^2 - \beta)e^{i\omega_2 t}, \quad \hat{y}_2 = \hat{\lambda}_2 (\alpha - a\omega_2^2)e^{i\omega_2 t}. \quad (11.42)$$

Общее решение уравнений движения получается сложением (1.1.41) и (1.1.42):

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{\lambda}_1 (b\omega_1^2 - \beta)e^{i\omega_1 t} + \hat{\lambda}_2 (b\omega_2^2 - \beta)e^{i\omega_2 t} \\ \hat{y} &= \hat{\lambda}_1 (\alpha - a\omega_1^2)e^{i\omega_1 t} + \hat{\lambda}_2 (\alpha - a\omega_2^2)e^{i\omega_2 t} \end{aligned} \right\}. \quad (11.43)$$

Чтобы найти «физическое» общее решение, осталось выделить из полученных функций вещественные части:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 (b\omega_1^2 - \beta)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 (b\omega_2^2 - \beta)\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ y &= C_1 (\alpha - a\omega_1^2)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 (\alpha - a\omega_2^2)\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\}. \quad (11.44)$$

Четыре произвольные пока константы  $C_1, C_2, \varphi_1, \varphi_2$  находятся из четырех начальных условий

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0. \quad (11.44)^*$$

Итак, колебания системы представляют собой наложение гармонических колебаний с собственными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Каждое из слагаемых в решении (11.43) является строго периодической функцией времени, но координаты  $x$  и  $y$  в общем случае таковыми не являются. Они суть также периодические функции лишь в том случае, когда частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соизмеримы. Подчеркнем также, что частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  нельзя отождествлять с частотами колебаний каких-то определенных частиц системы. Они характеризуют движение системы в целом.

И здесь возникает один чрезвычайно важный вопрос. А нельзя ли обобщенные координаты выбрать так, чтобы каждая из них менялась во времени по строго

гармоническому закону с какой-то определенной частотой? Ответ на этот вопрос оказывается положительным.

Определение. Обобщенные координаты  $X$  и  $Y$ , меняющиеся во времени по гармоническому закону, называются *нормальными* (или *главными*) координатами системы.

Существование нормальных координат можно доказать разными способами.

1. Как говорилось выше, кинетическая и потенциальная энергии системы, совершающей малые колебания, суть положительно определенные квадратичные формы. Но в математике устанавливается, что две положительно определенные квадратичные формы всегда можно привести одновременно к диагональному виду, т.е. к сумме квадратов. Иными словами, всегда можно построить такие линейные комбинации старых координат  $x$  и  $y$ :

$$\tilde{X} = \mu x + \nu y, \quad \tilde{Y} = \lambda x + \rho y, \quad (11.45)$$

что функция Лагранжа в новых координатах  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  будет записываться как

$$L = \frac{1}{2}(M_1 \dot{\tilde{X}}^2 + M_2 \dot{\tilde{Y}}^2) - \frac{1}{2}(K_1 \tilde{X}^2 + K_2 \tilde{Y}^2). \quad (11.46)$$

Вводя теперь координаты

$$X = \sqrt{M_1} \tilde{X}, \quad Y = \sqrt{M_2} \tilde{Y}, \quad (11.47)$$

представим лагранжиан (11.46) в виде:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{1}{2}(\Omega_1^2 X^2 + \Omega_2^2 Y^2), \quad (11.48)$$

где

$$\Omega_1^2 = \frac{K_1}{M_1}, \quad \Omega_2^2 = \frac{K_2}{M_2}. \quad (11.49)$$

Уравнения движения записываются теперь как

$$\ddot{X} + \Omega_1^2 X = 0, \quad \ddot{Y} + \Omega_2^2 Y = 0, \quad (11.50)$$

так что координаты  $X$  и  $Y$  меняются во времени по закону

$$X = C_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1), \quad Y = C_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2), \quad (11.51)$$

являясь, тем самым, нормальными координатами. При этом частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  совпадают, как нетрудно показать, с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

2. К тому же результату можно прийти гораздо проще, если внимательно посмотреть на общее решение (11.44) и сравнить его с (11.51). Обозначая

$$C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \equiv X, \quad C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \equiv Y, \quad (11.52)$$

перепишем общее решение (11.44) в форме

$$\begin{aligned} x &= (b\omega_1^2 - \beta)X + (b\omega_2^2 - \beta)Y \\ y &= (\alpha - a\omega_1^2)X + (\alpha - a\omega_2^2)Y \end{aligned} \quad (11.53)$$

Рассматриваем эти соотношения как уравнения относительно величин  $X$  и  $Y$  и разрешаем их. В итоге получим  $X$  и  $Y$  в виде некоторых линейных комбинаций  $x$  и  $y$ . По самому своему определению (11.52)  $X$  и  $Y$  меняются во времени по гармоническому закону. Поэтому они и являются нормальными координатами.

3. Наконец, эту проблему можно исследовать, отправляясь непосредственно от уравнений движения (11.22):

$$\begin{aligned} a\ddot{x} + b\ddot{y} + \alpha x + \beta y &= 0 \\ b\ddot{x} + c\ddot{y} + \beta x + \gamma y &= 0 \end{aligned}$$

Умножим первое из них на постоянный множитель  $\mu$ , второе – на  $\nu$  и сложим результаты:

$$(\mu a + \nu b)\ddot{x} + (\mu b + \nu c)\ddot{y} + (\mu\alpha + \nu\beta)x + (\mu\beta + \nu\gamma)y = 0, \quad (11.54)$$

Потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$\left. \begin{aligned} (\mu a + \nu b)x + (\mu b + \nu c)y &= z \\ (\mu\alpha + \nu\beta)x + (\mu\beta + \nu\gamma)y &= \Omega^2 z \end{aligned} \right\} \quad (11.55)$$

где  $z$  – некоторая функция времени. Тогда для  $z$  получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = 0, \quad (11.56)$$

которое имеет общее решение

$$z = c \cdot \cos(\Omega t + \varphi), \quad (11.57)$$

так что  $z$  является одной из нормальных координат.

Как же удовлетворить условиям (11.55)? Очевидно, достаточно потребовать, чтобы имели место равенства

$$\left. \begin{aligned} \Omega^2(\mu a + \nu b) = \mu\alpha + \nu\beta \\ \Omega^2(\mu b + \nu c) = \mu\beta + \nu\gamma \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} (a\Omega^2 - \alpha)\mu + (b\Omega^2 - \beta)\nu &= 0 \\ (b\Omega^2 - \beta)\mu + (c\Omega^2 - \gamma)\nu &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11.58)$$

В итоге мы получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $\mu$  и  $\nu$ , которая идентична системе уравнений (11.35) для определения коэффициентов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ . В частности, она имеет нетривиальное решение лишь в том случае, когда

$$(a\Omega^2 - \alpha)(c\Omega^2 - \gamma) - (b\Omega^2 - \beta)^2 = 0. \quad (11.59)$$

Это уравнение совпадает с характеристическим уравнением (11.37), так что сразу получаем

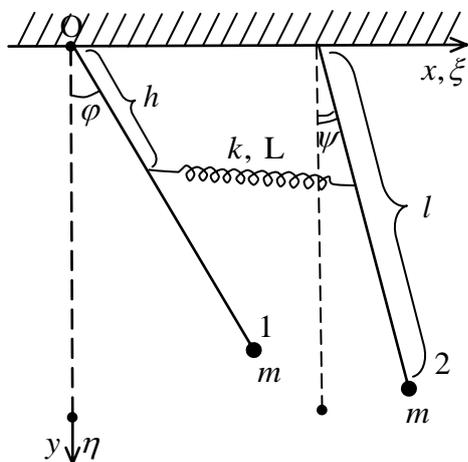
$$\Omega_1 = \omega_1, \quad \Omega_2 = \omega_2. \quad (11.60)$$

Таким образом, собственные частоты не зависят от выбора обобщенных координат! Проводя теперь ту же процедуру, что и раньше, найдем два решения системы алгебраических уравнений (11.58), т.е. два набора коэффициентов  $\mu_1, \nu_1$  и  $\mu_2, \nu_2$  содержащих по одному произвольному параметру. Фиксируя эти параметры произвольным образом и подставляя каждый набор в (11.55), найдем две нормальные координаты  $z_1 \equiv X$  и  $z_2 \equiv Y$ . Таким образом, физическая задача отыскания нормальных координат или математическая задача одновременной диагонализации двух положительно определенных квадратичных форм решается вместе с исходной задачей об отыскании закона движения системы, совершающей малые колебания.

Аналогичным способом можно исследовать малые колебания систем с трением и с вынужденными силами, но мы эти задачи рассматривать не будем.

## §12. Связанные маятники

В качестве приложения общей теории проанализируем малые колебания двух связанных плоских математических маятников. Впрочем, подобные задачи гораздо проще и удобнее решать каждый раз как бы заново, не пользуясь громоздкими общими формулами.



## З а д а ч а

Имеются два одинаковых математических маятника длиной  $l$  и массой  $m$ . Расстояние между точками подвеса равно  $L$ . На высоте  $h$  от точек подвеса к стержням маятников прикреплена пружина длиной  $L$  с коэффициентом упругости  $k$ . Найти собственные частоты и нормальные координаты системы. Установить ее закон движения, если в нулевой момент времени левый маятник отклонен на угол  $\varphi_0$ , правый маятник висит вертикально, причем оба маятника покоятся.

Система имеет две степени свободы, и в качестве обобщенных координат выбираем углы  $\varphi$  и  $\psi$ . Декартовы координаты  $x_{1,2}$ ,  $y_{1,2}$  частиц и декартовы координаты  $\xi_{1,2}$ ,  $\eta_{1,2}$  точек закрепления пружины равны:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l \cdot \sin \varphi \\ y_1 &= l \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} x_2 &= l \cdot \sin \psi + L \\ y_2 &= l \cdot \cos \psi \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \xi_1 &= h \sin \varphi \\ \eta_1 &= h \cos \varphi \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \xi_2 &= L + h \sin \psi \\ \eta_2 &= h \cos \psi \end{aligned} \right\}. \quad (12.1)$$

Отсюда для кинетической энергии сразу получаем:

$$T = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m}{2} [(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)] = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2). \quad (12.2)$$

Потенциальная энергия складывается из двух частей:

$$U = U_I + U_{II}, \quad (12.3)$$

где  $U_I$  – потенциальная энергия маятников в поле тяжести, а  $U_{II}$  – потенциальная энергия деформированной пружины. Для первой из них имеем:

$$U_I = -mgy_1 - mgy_2 = -mgl(\cos \varphi + \cos \psi), \quad (12.4)$$

или, производя разложение в ряд Тейлора и отбрасывая аддитивную постоянную  $-2mgl$ , т.е. отсчитывая  $U_I$  от нижнего положения маятников

$$U_I \cong \frac{mgl}{2} (\varphi^2 + \psi^2). \quad (12.5)$$

Для потенциальной энергии пружины имеем:

$$\begin{aligned}
U_{II} &= \frac{k}{2}(\Delta L)^2 = \frac{k}{2} \left\{ \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2} - L \right\}^2 = \\
&= \frac{k}{2} \left\{ \sqrt{[L + h(\sin \psi - \sin \varphi)]^2 + [h(\cos \psi - \cos \varphi)]^2} - L \right\}^2 \cong \\
&\cong \frac{k}{2} \left\{ \sqrt{[L + h(\psi - \varphi)]^2 + \left[ h \left( -\frac{\psi^2}{2} + \frac{\varphi^2}{2} \right) \right]^2} - L \right\}^2 \cong \\
&\cong \frac{k}{2} \{ [L + h(\psi - \varphi)] - L \}^2,
\end{aligned}$$

т.е.

$$U_{II} \cong \frac{kh^2}{2}(\varphi - \psi)^2. \quad (12.6)$$

Собирая вместе полученные выражения для  $T$  и  $U$ , придем к следующей функции Лагранжа:

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{\psi}^2 - \left( \frac{mgl}{2} + \frac{kh^2}{2} \right) \varphi^2 - \left( \frac{mgl}{2} + \frac{kh^2}{2} \right) \psi^2 + kh^2 \varphi \psi.$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0.$$

Записывается следующим образом

$$\left. \begin{aligned}
ml^2 \ddot{\varphi} + (mgl + kh^2) \varphi - kh^2 \psi &= 0 \\
ml^2 \ddot{\psi} + (mgl + kh^2) \psi - kh^2 \varphi &= 0
\end{aligned} \right\}. \quad (12.7)$$

Поделим их на  $ml^2$  и введем обозначение

$$\omega_0^2 \equiv \frac{g}{l}, \quad (12.8)$$

где  $\omega_0$  – частота колебаний несвязанных маятников. Тогда получим следующие окончательные уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned}
\ddot{\varphi} + \left( \omega_0^2 + \frac{kh^2}{ml^2} \right) \varphi - \frac{kh^2}{ml^2} \psi &= 0 \\
\ddot{\psi} + \left( \omega_0^2 + \frac{kh^2}{ml^2} \right) \psi - \frac{kh^2}{ml^2} \varphi &= 0
\end{aligned} \right\}. \quad (12.9)$$

Как и всегда, ищем решение этой системы дифференциальных уравнений в виде

$$\varphi = Ae^{i\omega t}, \quad \psi = Be^{i\omega t}. \quad (12.10)$$

Подстановка в (12.9) и сокращение на общий экспоненциальный множитель дает нам систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \omega^2 - \left( \omega_0^2 + \frac{kh^2}{ml^2} \right) \right] A + \frac{kh^2}{ml^2} B = 0 \\ \frac{kh^2}{ml^2} A + \left[ \omega^2 - \left( \omega_0^2 + \frac{kh^2}{ml^2} \right) \right] B = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (12.11)$$

Условие ее разрешимости гласит:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \left( \omega_0^2 + \frac{kh^2}{ml^2} \right) & \frac{kh^2}{ml^2} \\ \frac{kh^2}{ml^2} & \omega^2 - \left( \omega_0^2 + \frac{kh^2}{ml^2} \right) \end{vmatrix} = 0, \quad (12.12)$$

или

$$\left[ \omega^2 - \left( \omega_0^2 + \frac{kh^2}{ml^2} \right) \right]^2 - \left( \frac{kh^2}{ml^2} \right)^2 = 0, \quad (12.13)$$

откуда

$$\omega^2 - \left( \omega_0^2 + \frac{kh^2}{ml^2} \right) = \pm \frac{kh^2}{ml^2}. \quad (12.14)$$

Взяв знак минус в правой части, получим

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \quad (12.15)$$

или

$$\omega_1 = \omega_0. \quad (12.16)$$

Выбрав знак плюс, найдем:

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2kh^2}{ml^2} \quad (12.17)$$

или

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2kh^2}{ml^2 \omega_0^2}} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2kh^2}{mgl}}. \quad (12.18)$$

Формулы (12.16) и (12.18) задают нам собственные частоты колебаний рассматриваемой системы.

Подставляем первую частоту, т.е. (12.15), в первое уравнение (12.11):

$$-\frac{kh^2}{ml^2} A + \frac{kh^2}{ml^2} B = 0, \quad (12.19)$$

откуда

$$A = B \equiv C, \quad (12.20)$$

и мы получаем первое решение уравнений движения:

$$\varphi_1 = Ce^{i\omega_1 t}, \quad \psi_1 = C \cdot e^{i\omega_1 t}. \quad (12.21)$$

Подстановка в (12.1 1) второй частоты, т.е. выражения (12.17), дает

$$\frac{kh^2}{ml^2} A + \frac{kh^2}{ml^2} B = 0, \quad (12.22)$$

откуда

$$A = -B \equiv D, \quad (12.23)$$

и мы находим второе решение уравнению движения:

$$\varphi_2 = De^{i\omega_2 t}, \quad \psi_2 = -De^{i\omega_2 t}. \quad (12.24)$$

Общее решение получается путем сложения (12.22) и (12.24):

$$\begin{aligned} \varphi &= Ce^{i\omega_1 t} + De^{i\omega_2 t} \\ \psi &= Ce^{i\omega_1 t} - De^{i\omega_2 t} \end{aligned} \quad (12.25)$$

или, после выделения вещественной части:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A \cos(\omega_1 t + \alpha) + B \cos(\omega_2 t + \beta) \\ \psi &= A \cos(\omega_1 t + \alpha) - B \cos(\omega_2 t + \beta) \end{aligned} \right\} \quad (12.26)$$

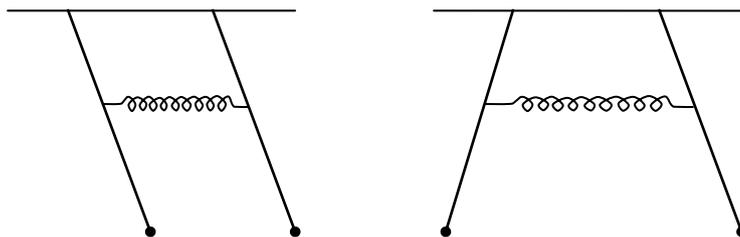
Нормальные координаты  $\Phi$  и  $\Psi$ , меняющиеся каждая по гармоническому закону:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= A \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ \Psi &= B \cos(\omega_2 t + \beta) \end{aligned} \right\}, \quad (12.27)$$

найдем, разрешая (12.26) относительно этих функций:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi), \quad \Psi = \frac{1}{2}(\varphi - \psi). \quad (12.27^*)$$

Физический смысл совершенно ясен из следующего рисунка:



Частоте  $\omega_1$  отвечает колебание, при котором пружина выключена, откуда сразу ясно, что  $\omega_1 = \omega_0$ . Это нормальное колебание симметрично, т.е.  $\Phi$  переходит в себя при замене  $\varphi$  на  $\psi$  и наоборот. Частоте  $\omega_2$  отвечает колебание, при котором пружина периодически деформируется, причем максимальным образом. Это убыстряет движение по сравнению с первым, а потому  $\omega_2 > \omega_0$ .

Второе нормальное колебание антисимметрично:  $\Psi$  переходит в  $-\Psi$  при замене  $\varphi \rightleftharpoons \psi$ .

Вернемся к общему решению (12.26) и найдем входящие в него 4 константы  $A, \alpha, B, \beta$  из начальных условий, которые в нашем случае записываются как

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = 0. \quad (12.28)$$

Подстановка этих значений в (12.26) дает систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} A \cos \alpha + B \cos \beta = \varphi_0 \\ \omega_1 A \sin \alpha + \omega_2 B \sin \beta = 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} A \cos \alpha - B \cos \beta = 0 \\ \omega_1 A \sin \alpha - \omega_2 B \sin \beta = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (12.28^*)$$

которые можно переписать как

$$\left. \begin{aligned} B \cos \beta = A \cos \alpha \\ B \sin \beta = \frac{\omega_1}{\omega_2} A \sin \alpha \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} 2A \cos \alpha = \varphi_0 \\ 2\omega_1 A \sin \alpha = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (12.29)$$

Из второй пары уравнений получаем

$$\alpha = 0, \quad A = \frac{\varphi_0}{2}. \quad (12.30)$$

После этого первая пара уравнений (12.29) даст

$$\beta = 0, \quad B = \frac{\varphi_0}{2}. \quad (12.31)$$

Таким образом, мы приходим к следующему окончательному закону движения рассматриваемой системы двух связанных маятников:

$$\left. \begin{aligned} \varphi = \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega_1 t + \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega_2 t \\ \psi = \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega_1 t - \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega_2 t \end{aligned} \right\}, \quad (12.32)$$

Для дальнейшего это полезно представить в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} \varphi = \varphi_0 \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \\ \psi = \varphi_0 \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \end{aligned} \right\}. \quad (12.33)$$

Рассмотрим теперь весьма интересный случай слабо связанных маятников, когда

$$kh^2 \ll mgl. \quad (12.34)$$

Тогда частоту  $\omega_2$ , задаваемую формулой (12.18), можно разложить в ряд Тейлора:

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2kh^2}{mgl}} \cong \omega_0 \left( 1 + \frac{kh^2}{mgl} \right) = \omega_0 + \frac{kh^2}{mgl} \omega_0,$$

т.е. представить в форме

$$\omega_2 \cong \omega_0 + 2\Omega, \quad (12.35)$$

где

$$\Omega \equiv \frac{kh^2}{2mgl} \omega_0 \ll \omega_0, \quad (12.36)$$

Полусумма и полуразность частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  будут теперь равны

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cong \omega_0, \quad \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cong \Omega, \quad (12.37)$$

так что закон движения (12.33) представится в форме

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= [\varphi_0 \cos \Omega t] \cdot \cos \omega_0 t \equiv \Phi(t) \cdot \cos \omega_0 t \\ \psi &= [\varphi_0 \cdot \sin \Omega t] \cdot \sin \omega_0 t \equiv \Psi(t) \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\} \quad (12.38)$$

где  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$  – очень медленно меняющиеся во времени функции.

Таким образом, слабо связанные маятники совершают гармонические колебания с частотой  $\omega_0$  свободных маятников и с амплитудами, модулированными разностной частотой  $\Omega$ . Иными словами, колебания маятников представляют собой биения.

Интересно распределение энергии между маятниками в разные моменты времени. В начальный момент  $\Phi(t)$  имеет максимум, а  $\Psi(0) = 0$ , и вся энергия запасена в первом маятнике. Затем амплитуда  $\Phi(t)$  убывает, а амплитуда  $\Psi(t)$  возрастает. В момент времени

$$\tau = \frac{\pi}{2\Omega} = \frac{\pi mgl}{kh^2} \equiv \frac{T}{4}, \quad (12.39)$$

т.е. через четверть периода биений, колебания первого маятника прекращаются, а колебания второго маятника максимальны – вся энергия перекачивается во второй маятник. Подобная перекачка происходит каждую четверть периода биений. Из (12.39) ясно, что время обмена энергией  $\tau \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow 0$ .